

MICHELA ELEUTERI

**DISPENSE DEL CORSO DI ANALISI
MATEMATICA I**

Università degli Studi di Verona, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA E BIOINFORMATICA

A.A. 2011/2012

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica
non assomigli al papà 😊

Indice

1	Numeri	7
1.1	Insiemi e logica	7
1.1.1	Elementi di teoria degli insiemi	7
1.1.2	Insiemi numerici: cenni	9
1.1.3	Operazioni tra insiemi	9
1.1.4	Elementi di logica	11
1.2	Campi ordinati	14
1.2.1	L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q}	14
1.2.2	Numeri reali: estremo superiore e assioma di continuità	15
1.3	Radicali, potenze e logaritmi	20
1.3.1	Radici n -esime aritmetiche	20
1.3.2	Potenze a esponente reale	20
1.3.3	Logaritmi	21
1.4	Numeri complessi	21
1.4.1	Definizione di \mathbb{C} e struttura di campo	21
1.4.2	Forma trigonometrica dei numeri complessi	24
1.4.3	Potenze di numeri complessi	25
1.4.4	Radici n -esime di numeri complessi	26
1.5	Complementi	28
1.5.1	Valore assoluto	28
1.5.2	Sommatorie	29
1.5.3	I numeri naturali e il principio di induzione	31
1.5.4	Fattoriale e coefficienti binomiali	32
2	Funzioni reali di una variabile reale	35
2.1	Generalità	35
2.2	Funzioni limitate	36
2.3	Funzioni simmetriche	38

2.4	Funzioni monotone	38
2.5	Funzioni periodiche	39
2.6	Funzioni elementari	39
2.6.1	Funzioni potenza	39
2.6.2	Funzioni esponenziali e logaritmiche	39
2.6.3	Funzioni trigonometriche	40
2.6.4	Funzione parte intera e mantissa	42
2.6.5	Funzioni iperboliche	42
2.7	Funzioni composte	42
2.8	Funzioni invertibili e funzioni inverse	43
2.8.1	Generalità	43
2.8.2	Funzioni trigonometriche inverse	46
2.9	Alcuni grafici elementari	47
3	Successioni	57
3.1	Definizioni ed esempi	57
3.2	Risultati preparatori	59
3.3	Successioni convergenti, divergenti, indeterminate	60
3.4	Calcolo dei limiti e forme di indecisione	64
3.5	Confronti e stime asintotiche	67
4	Limiti di funzioni reali di variabile reale	71
4.1	Definizione e prime proprietà	71
4.1.1	Limite finito all'infinito	72
4.1.2	Limite infinito all'infinito	73
4.1.3	Limite infinito al finito	74
4.1.4	Limite finito al finito	75
4.2	Calcolo dei limiti	77
4.2.1	Limiti notevoli	79
4.3	Confronti e stime asintotiche	83
4.4	Esercizi proposti	85
5	Proprietà globali	89
5.1	Funzioni continue su un intervallo	89
5.2	Funzioni monotone su un intervallo	92
5.3	Continuità e invertibilità	92
5.4	Esercizi proposti	93

6	Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale	99
6.1	Definizione di derivata e derivate di funzioni elementari	99
6.2	Punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale	103
6.2.1	Punti angolosi	103
6.2.2	Flessi a tangente verticale e cuspidi	104
6.3	Continuità e derivabilità	104
6.4	Regole di calcolo delle derivate	105
6.5	Derivata della funzione composta e inversa	106
6.6	Esercizi proposti	106
6.7	Punti stazionari; massimi e minimi locali	109
6.8	Relazioni tra continuità e derivabilità: esempi e controesempi	115
6.9	Il Teorema di De l'Hospital	117
6.10	Derivate seconde e funzioni convesse	119
6.11	Studio del grafico di una funzione	122
6.12	Approssimazione lineare e formula di Taylor	128
6.12.1	Linearizzazione e approssimazione del primo ordine	128
6.12.2	Relazione tra "o piccolo" e "asintotico"	132
6.12.3	Approssimazione polinomiale: polinomio e formula di Taylor e di Mac Laurin	133
6.12.4	Algebra degli "o piccoli"	135
6.12.5	Formula di Taylor con resto secondo Lagrange e stima dell'errore	137
6.12.6	Polinomio di Taylor e approssimazione: un esempio significativo	138
6.12.7	Esercizi proposti	139
6.13	Complementi	141
6.13.1	La proprietà di Darboux delle funzioni derivate	141
7	Serie	143
7.1	Definizione di serie e prime proprietà	143
7.2	Criteri di convergenza per serie a termini non negativi	147
7.3	Serie a termini di segno variabile	151
7.4	Riassumendo	153
7.5	Esercizi proposti	154
8	Integrazione	171
8.1	Definizione di integrale e prime proprietà	171
8.2	Classi di funzioni integrabili	174
8.3	Proprietà dell'integrale	177
8.4	Primitive. Teorema fondamentale del calcolo integrale	179

8.5	Tabella di primitive elementari	181
8.6	Metodi di integrazione	182
8.6.1	Integrazione per scomposizione	182
8.6.2	Integrazione per sostituzione	182
8.6.3	Integrali immediati	183
8.6.4	Integrazione di funzioni razionali	183
8.6.5	Integrazione per parti	185
8.6.6	Integrazione delle funzioni trigonometriche	186
8.6.7	Esercizi proposti	187
8.7	Applicazioni	190
8.7.1	Lunghezza di un grafico	190
8.7.2	Volume di un solido di rotazione attorno a un asse	191
8.8	Il concetto di area	192
8.9	Integrali generalizzati	193
8.9.1	Integrali di funzioni non limitate	193
8.9.2	Criteri di integrabilità al finito	196
8.9.3	Integrazione su intervalli illimitati	197
8.9.4	Criteri di integrabilità all'infinito	199
8.10	Esercizi proposti	201
8.10.1	Funzioni integrali	207
8.11	Riassumendo	211
8.12	Complementi	213
9	Equazioni differenziali	217
9.1	Modelli differenziali	217
9.2	Equazioni differenziali del primo ordine	220
9.2.1	Generalità	220
9.2.2	Equazioni a variabili separabili	222
9.2.3	Equazioni lineari del primo ordine	225
9.3	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	228
9.3.1	Generalità	228
9.3.2	La struttura dell'integrale generale	230
9.3.3	Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti . . .	232
9.3.4	Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza	235
10	Successioni definite per ricorrenza	241

CAPITOLO 1

Numeri

1.1. Insiemi e logica

1.1.1. Elementi di teoria degli insiemi

Il primo obiettivo del nostro corso sarà quello di introdurre gli oggetti più elementari del discorso matematico: i NUMERI; sul concetto di numero si basa quello di funzione.

Tuttavia prima è necessario introdurre e puntualizzare alcuni concetti base che hanno a che fare con il linguaggio matematico. Cominceremo con concetti di base sugli INSIEMI (Zermelo nel 1908 ha introdotto la teoria assiomatica degli insiemi; Cantor nel 1880 ne parla in modo più informale; noi introdurremo concetti in maniera informale o “ingenuo” come si usa dire di solito).

Abbiamo a che fare con tre parole chiave: INSIEME, ELEMENTO E APPARTENENZA. Cercheremo di andare a spiegare (non definire!) il significato di questi termini.

Il concetto di INSIEME è una nozione primitiva; un insieme è determinato dai suoi elementi; più in generale un insieme è definito quando c'è un criterio per stabilire se un oggetto sta o no in quell'insieme. Per indicare gli insiemi, di solito si usano le lettere maiuscole A, B, X, Y, \dots .

L'APPARTENENZA si indica con il simbolo \in e scriviamo $x \in A$ per indicare che x è un elemento dell'insieme A ; scriveremo $x \notin A$ per indicare che x non appartiene ad A . Un insieme può essere definito per *tabulazione* cioè elencando i singoli elementi che vi appartengono, per esempio $A = \{1, 2, 3\}$ oppure per *caratteristica* elencando la caratteristica che devono possedere gli elementi dell'insieme, per esempio $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$. In ogni caso è bene notare che l'ordine non conta e nemmeno la molteplicità, ad esempio $\{x \in \mathbb{R} : x - 2 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x - 2)^2 = 0\}$.

L'UGUAGLIANZA tra insiemi A e B si indica con $A = B$ e si esprime con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad \forall x, (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

In parole si può dire che ogni elemento di A deve stare in B e viceversa. Il simbolo \forall indica il QUANTIFICATORE UNIVERSALE e si legge “per ogni” mentre il simbolo \Rightarrow indica l’IMPLICAZIONE LOGICA e si legge “se...allora” oppure “implica”.

L’INCLUSIONE tra due insiemi A e B si indica con $A \subseteq B$ e si esprime con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ricordiamo che con questa scrittura si lascia la possibilità ad A di essere uguale a B . Se vogliamo indicare invece un’inclusione stretta (cioè che ci sia almeno un elemento di B che non appartiene ad A), si usa di solito il simbolo $A \subset B$ oppure $A \subsetneq B$ e si esprime questo concetto con la seguente legge

$$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \quad \text{e} \quad \exists x \in B : x \notin A.$$

Il simbolo \exists indica il QUANTIFICATORE ESISTENZIALE e si legge “esiste almeno”; nel caso l’elemento che esiste sia unico si indica con $\exists!$.

☞ **Osservazione 1.1.1.** Occorre fare attenzione alla differenza tra il simbolo di appartenenza e quello di inclusione. Infatti per esempio le seguenti scritture hanno senso

$$x \in A; \quad 2 \in \{1, 2, 3\}; \quad \{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}; \quad \{1, 2, 3\} \neq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

notando che ovviamente $2 \neq \{2\}$. Invece le seguenti scritture non hanno senso

$$2 \subseteq \{1, 2, 3\}; \quad \{2\} \in \{1, 2, 3\}.$$

L’INSIEME VUOTO è l’insieme che non contiene elementi; si indica con il simbolo \emptyset . Naturalmente

$$\emptyset \neq 0 \neq \{\emptyset\}.$$

Inoltre è banale dimostrare che

$$\emptyset \subseteq A, \quad \forall A.$$

L’INSIEME DELLE PARTI di un insieme X è l’insieme che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di X . Si indica con il simbolo $\mathcal{P}(X)$.

📖 **Esempio 1.1.2.** Se $X = \{a, b, c\}$ allora

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

L’insieme delle parti contiene sempre i due sottoinsiemi banali \emptyset e X .

□ **Definizione 1.1.3.** Sia A un insieme finito; chiamiamo CARDINALITÀ DI A il numero degli elementi di A . Essa si denota anche con $\text{card}(A)$.

È facile dimostrare che se X ha cardinalità n (cioè ha n elementi), l’insieme $\mathcal{P}(X)$ ha cardinalità 2^n (cioè ha 2^n elementi).

1.1.2. Insiemi numerici: cenni

Concludiamo il paragrafo accennando ai vari insiemi numerici, che verranno ripresi e studiati nel corso di questo capitolo. Abbiamo i seguenti insiemi:

- \mathbb{N} insieme dei numeri NATURALI (0 incluso): $0, 1, 2, \dots$
- \mathbb{Z} insieme dei numeri INTERI RELATIVI: $0, -1, 1, \dots$
- \mathbb{Q} insieme dei numeri RAZIONALI: $\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. I numeri razionali si possono anche scrivere in forma decimale (decimali finiti o decimali periodici).
- \mathbb{R} insieme dei numeri REALI: si tratta dei decimali non periodici, es.: $0, 1011011101111 \dots$ (irrazionale)
- \mathbb{C} insieme dei numeri COMPLESSI es: $\sqrt{-1} = i$.

Vale la seguente catena di inclusioni strette:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

1.1.3. Operazioni tra insiemi

In questa sezione ci occupiamo di alcune tra le più comuni operazioni tra gli insiemi. Sia X l'insieme universo comune (può essere ad esempio $X = \mathbb{N}$ oppure $X = \mathbb{R}$).

□ Definizione 1.1.4. Dati due insiemi A e B , si dice INTERSEZIONE DI A E B , e si indica con $A \cap B$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B .

Allora l'intersezione tra due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

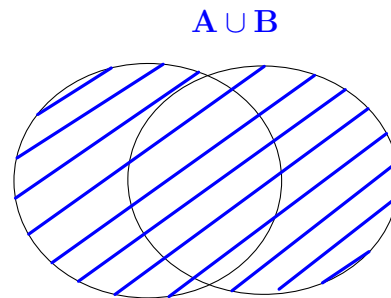
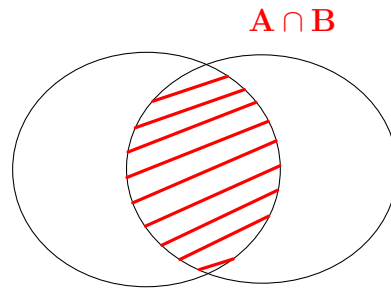
Se A e B non hanno elementi comuni, allora la loro intersezione è l'insieme vuoto; in tal caso diremo che A e B sono *disgiunti*.

Si verifica facilmente che

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

□ Definizione 1.1.5. Dati due insiemi A e B , si dice UNIONE DI A E B , e si indica con $A \cup B$, l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A o B .



L'unione tra due insiemi A e B è dunque l'insieme

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Anche in questo caso si verifica facilmente che

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A$$

e anche

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

□ Definizione 1.1.6. Dati due insiemi A e B , si dice **DIFFERENZA DI A E B** , e si indica con $A \setminus B$, l'insieme costituito da tutti gli elementi di A che non appartengono a B .

L'insieme differenza è dunque l'insieme

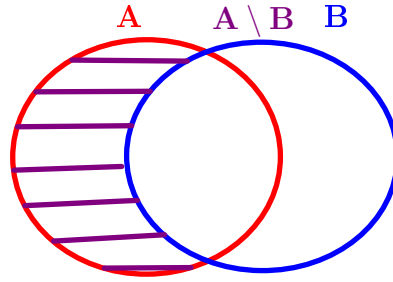
$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Osserviamo che se $A \cap B = \emptyset$ allora si ha $A \setminus B = A$; d'altra parte se $A \subseteq B$ allora $A \setminus B = \emptyset$. Si possono poi facilmente dimostrare le seguenti *proprietà distributive*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e le seguenti *Leggi di De Morgan*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$



□ **Definizione 1.1.7.** Dati due insiemi A e X , con $A \subseteq X$, si dice **COMPLEMENTARE DI A RISPETTO A X** , e si indica con A^c o $C_X A$ (talvolta anche con \bar{A}) l'insieme $X \setminus A$.

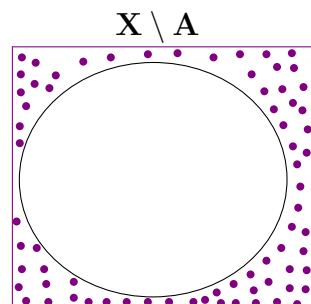
Dunque l'insieme complementare di A è fatto rispetto ad un insieme universo X ed è l'insieme

$$C_X A := \{x \in X : x \notin A\}$$

Siano A e B sottoinsiemi di X ; allora le leggi di De Morgan si possono riscrivere nel modo seguente

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Un'altra operazione importante è il **PRODOTTO CARTESIANO** tra due insiemi A e B non



necessariamente distinti, che è l'insieme

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

In generale si ha che $A \times B \neq B \times A$. Inoltre ad esempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si può identificare con \mathbb{R}^2 (e scriveremo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$) e allo stesso modo si indicherà con \mathbb{R}^n le n -uple di numeri reali.

1.1.4. Elementi di logica

□ **Definizione 1.1.8.** Diciamo **PROPOSIZIONE** una frase per la quale ha senso chiedersi se è vera o falsa.

✎ **Esempio 1.1.9.** *3 è un numero primo (proposizione vera); 6 è un numero primo (proposizione falsa).*

□ **Definizione 1.1.10.** Un PREDICATO $\mathcal{P}(x)$ definito su un insieme A è una frase che ad ogni elemento $a \in A$ associa una proposizione $\mathcal{P}(a)$. Detto altrimenti è una frase in cui la verità o la falsità dipende dalla variabile o dalle variabili che in esso compaiono.

✎ **Esempio 1.1.11.** *n è un numero primo.*

Più proposizioni si possono combinare tra loro per formarne di nuove e più complesse. Ciò avviene attraverso l'uso di connettivi logici:

✎ **NEGAZIONE:** data una proposizione \mathcal{P} la sua negazione si indica con il segno $\neg\mathcal{P}$ (o talvolta anche $\overline{\mathcal{P}}$) e corrisponde al cambiamento del valore di verità.

✎ **CONGIUNZIONE:** si indica con \wedge ; la proposizione $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è vera se e solo se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere.

✎ **DISGIUNZIONE:** si indica con \vee ; la proposizione $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è vera se e solo se almeno una tra \mathcal{P} e \mathcal{Q} è vera.

✎ **IMPLICAZIONE:** si indica con \Rightarrow ; la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è falsa se e solo se \mathcal{P} è vera e \mathcal{Q} è falsa; in tutti gli altri casi risulta vera.

✎ **DOPPIA IMPLICAZIONE:** si indica con \Leftrightarrow ; la proposizione $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera se e solo se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere o entrambe false.

✎ **DISGIUNZIONE ESCLUSIVA:** si indica con \vee^* ; la proposizione $\mathcal{P} \vee^* \mathcal{Q}$ è vera se e solo se una solamente tra \mathcal{P} e \mathcal{Q} è vera e l'altra è falsa.

Un modo per rendere proposizione un predicato è quello di saturare la variabile mediante l'uso di un QUANTIFICATORE. Come già accennato nel primo paragrafo, i due quantificatori più comunemente usati sono il QUANTIFICATORE UNIVERSALE \forall e il QUANTIFICATORE ESISTENZIALE \exists . Dunque la proposizione

$$\forall x \in A : \mathcal{P}(x)$$


si legge “per ogni x appartenente ad A vale $\mathcal{P}(x)$ ” e significa che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è verificata per tutti gli x che appartengono all'insieme A ; invece la proposizione

$$\exists x \in A : \mathcal{P}(x)$$

si legge “esiste x appartenente ad A tale che vale $\mathcal{P}(x)$ ” e significa che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ è verificata per almeno un elemento x che appartiene all'insieme A .

□ **Definizione 1.1.12.** Un'IMPLICAZIONE UNIVERSALE è un'implicazione che è vera per tutti i valori della variabile appartenenti a un dato insieme; in formule

$$\forall x \in A, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)).$$

 **Esempio 1.1.13.** Un esempio di implicazione universale è il seguente:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ è pari} \Rightarrow n + 1 \text{ è dispari}$$


La maggior parte dei teoremi è costituita da implicazioni universali. In questo caso $\mathcal{P}(x)$ è l'IPOTESI e $\mathcal{Q}(x)$ è la TESI. È chiaro che se vogliamo dimostrare un'implicazione universale, non possiamo mostrare che questa vale elencando tutti i possibili casi; ad esempio, nell'esempio precedente, non possiamo prendere $n = 2$ e verificare che siccome 2 è pari allora 3 è dispari e via di seguito per tutti gli n , perché sono infiniti.

Quindi una prima possibilità consiste nel considerare il generico n (o il generico x in generale) che soddisfa l'ipotesi e mostrare che esso soddisfa anche la tesi. Questo è il caso di una DIMOSTRAZIONE DIRETTA.

Esistono anche metodi di dimostrazioni INDIRETTE, che si basano cioè sulla negazione dell'implicazione universale. Innanzitutto vale

$$\forall x \in A, (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, (\neg \mathcal{Q}(x) \Rightarrow \neg \mathcal{P}(x))$$

che si chiama LEGGE DELLE CONTROINVERSE.

 **Esempio 1.1.14.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ pari} \Rightarrow n \text{ divisibile per } 2) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ non divisibile per } 2 \Rightarrow n \text{ non pari}).$$

Quindi per dimostrare un'implicazione universale, possiamo usare la legge delle controinverse e provare che se non vale la tesi allora non vale l'ipotesi.

Alternativamente possiamo utilizzare la DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO: assumiamo vera l'ipotesi e supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora si cerca di arrivare a una contraddizione mostrando che anche l'ipotesi è falsa, da cui l'assurdo.

Ci sono alcune semplici regole per la negazione:

$$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) = \neg(\mathcal{P}) \vee \neg(\mathcal{Q}); \quad \neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \neg(\mathcal{P}) \wedge \neg(\mathcal{Q}); \quad \neg(\neg \mathcal{P}) = \mathcal{P};$$

inoltre

$$\neg(\forall x : \mathcal{P}) = \exists x : \neg \mathcal{P}; \quad \neg(\exists x : \mathcal{P}) = \forall x : \neg \mathcal{P};$$

e soprattutto (la negazione dell'implicazione universale)

$$\neg[\forall x, (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] = \exists x : (\mathcal{P}) \wedge \neg(\mathcal{Q}).$$

Questo ci permette di lavorare nel caso in cui dobbiamo dimostrare che un'implicazione universale sia falsa. In tal caso, basandoci sulla relazione precedente, basta esibire un CONTROESEMPIO, cioè un esempio che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi (per la presenza nella negazione dell'implicazione universale del quantificatore esistenziale). Ad esempio, si consideri l'implicazione universale (falsa) $\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ dispari} \Rightarrow n \text{ primo}$. In tal caso, un controesempio è dato da $n = 15$: infatti 15 è dispari ma non primo.

1.2. Campi ordinati

In questo paragrafo andiamo a studiare la struttura degli esempi numerici introdotti prima, in particolare \mathbb{Q} e \mathbb{R} . L'idea è solo quella di puntualizzare delle proprietà, non di dare una costruzione rigorosa di questi campi, con lo scopo nel paragrafo successivo di mostrare la differenza fondamentale tra l'insieme dei razionali e l'insieme dei numeri reali.

1.2.1. L'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q}

Su \mathbb{Q} valgono le seguenti proprietà:

→ **R1** È definita in \mathbb{Q} un'operazione detta ADDIZIONE O SOMMA con le seguenti proprietà:

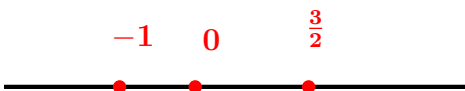
- 1) COMMUTATIVA $\forall a, b, a + b = b + a$;
- 2) ASSOCIATIVA $\forall a, b, c, (a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) esiste un elemento, detto ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA indicato con 0 tale che $\forall a, a + 0 = a$;
- 4) $\forall a$, esiste un elemento, l'inverso di a rispetto alla somma detto OPPOSTO di a indicato con $-a$ tale che $a + (-a) = 0$.

→ **R2** È definita in \mathbb{Q} un'operazione detta MOLTIPLICAZIONE O PRODOTTO con le seguenti proprietà:

- 1) COMMUTATIVA $\forall a, b, a \cdot b = b \cdot a$;
- 2) ASSOCIATIVA $\forall a, b, c, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- 3) esiste un elemento, detto ELEMENTO NEUTRO DEL PRODOTTO indicato con 1 UNITÀ tale che $\forall a, a \cdot 1 = a$;
- 4) $\forall a \neq 0$, esiste un elemento, l'inverso di a rispetto al prodotto detto RECIPROCO di a indicato con $\frac{1}{a}$ o a^{-1} tale che $a \cdot a^{-1} = 1$;
- 5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA della somma rispetto al prodotto:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b, c.$$

Dalle proprietà **R1** e **R2** si deducono le quattro operazioni fondamentali: infatti $a - b = a + (-b)$ e $a : b = a \cdot b^{-1}$, $b \neq 0$. È possibile dare un'interpretazione geometrica di \mathbb{Q} : infatti ad ogni numero razionale è possibile associare un punto della retta euclidea, come si vede in figura.



Inoltre \mathbb{Q} è un insieme ORDINATO. Infatti su \mathbb{Q} è definita una relazione \leq detta RELAZIONE D'ORDINE con le seguenti proprietà:

- 1) RIFLESSIVA $\forall a, a \leq a$;
- 2) ANTISIMMETRICA $\forall a, b$, se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$;
- 3) TRANSITIVA $\forall a, b, c$, se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.

Inoltre presi comunque $a, b \in \mathbb{Q}$, è sempre possibile confrontarli, cioè stabilire se $a \leq b$ oppure $b \leq a$. Quindi si dice che \mathbb{Q} è un insieme TOTALMENTE ORDINATO.

✎ **Esempio 1.2.1.** Sia dato l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X , dotato della relazione di inclusione \subseteq . Si verifica facilmente che l'inclusione definisce su $\mathcal{P}(X)$ una relazione d'ordine ma non totale (presi due insiemi, non è sempre possibile includere l'uno nell'altro); quindi $\mathcal{P}(X)$ con \subseteq non è un insieme totalmente ordinato.

Quindi riassumendo:

→ **R3** su \mathbb{Q} è definita una RELAZIONE D'ORDINE TOTALE compatibile con la struttura algebrica tale che cioè:

- 1) $\forall a, b, c$, se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$;
- 2) $\forall a, b, c$, con $c > 0$, se $a \leq b$ allora $ac \leq bc$;

(sono queste le usuali regole che si usano per risolvere le disequazioni). Si ha pertanto la seguente definizione:

□ **Definizione 1.2.2.** Un insieme su cui sono definite due operazioni che soddisfano le proprietà **R1** e **R2** si dice CAMPO

Un insieme su cui sono definite due operazioni e una relazione d'ordine che soddisfano le proprietà **R1**, **R2** e **R3** si dice CAMPO ORDINATO

Quindi si verifica facilmente \mathbb{R} e \mathbb{Q} sono entrambi campi ordinati. Allora cosa li differenzia? Cercheremo di rispondere a questa domanda nel prossimo paragrafo.

1.2.2. Numeri reali: estremo superiore e assioma di continuità

Premettiamo il seguente fatto elementare che ci servirà nella dimostrazione della proposizione successiva.

Lemma 1.2.3. n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari.

DIMOSTRAZIONE. Sia n dispari. Allora si scrive come $n = 2k + 1$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Allora

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_h + 1 =: 2h + 1$$

da cui la tesi □

A questo punto andiamo a dimostrare il seguente fatto.

Proposizione 1.2.4. *Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato è uguale a 2*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$. Per definizione, $r = \frac{n}{m}$, con $n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$. Supponiamo che tale frazione sia ridotta ai minimi termini (in particolare sicuramente n e m non saranno entrambi pari). Allora si ha

$$\frac{n^2}{m^2} = r^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2m^2.$$

A questo punto, dalla precedente uguaglianza si legge che per forza n^2 è pari, quindi anche n stesso è pari, perché se fosse stato dispari, il quadrato di un numero dispari sarebbe stato ancora dispari per il lemma precedente. Allora $n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, quindi sostituendo nella relazione precedente si ha

$$4k^2 = 2m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2k^2$$

quindi m è pari, contro l'ipotesi che m e n siano primi tra loro. Questo è assurdo e quindi la tesi è dimostrata. \square

Il significato della proposizione precedente è il seguente: esistono numeri reali che non hanno controparte razionale. Quindi in qualche modo \mathbb{R} “tappa i buchi di \mathbb{Q} ”. In questo paragrafo andremo a formalizzare questo importantissimo concetto, andando a introdurre l'ASSIOMA DELLA CONTINUITÀ. Sarà dunque questo a differenziare i due campi ordinati \mathbb{R} e \mathbb{Q} .

Premettiamo le seguenti definizioni.

\square **Definizione 1.2.5.** Sia $E \subseteq X$, con X insieme *totalmente ordinato*. Si dice che E è LIMITATO SUPERIORMENTE se $\exists M$ per cui $x \leq M, \forall x \in E$.

Analogamente si dice che E è LIMITATO INFERIORMENTE se $\exists m$ per cui $x \geq m, \forall x \in E$.

Si dice che E è LIMITATO se è limitato superiormente e inferiormente, cioè se $\exists m, M$ tali che $m \leq x \leq M, \forall x \in E$.

\square **Definizione 1.2.6.** Si dice che \bar{x} è MASSIMO per E se

(i) $\bar{x} \in E$

(ii) $x \leq \bar{x}, \forall x \in E$.

Analogamente si dice che \bar{x} è MINIMO per E se

(i) $\bar{x} \in E$

(ii) $x \geq \bar{x}, \forall x \in E$.

Quindi il massimo (minimo) è un limite superiore (inferiore) che in più appartiene all'insieme stesso; mentre il limite (o i limiti) superiore (inferiore) non è detto che appartenga all'insieme. Inoltre trovato un limite superiore (inferiore) di solito ne esistono infiniti. Riflettiamo ora sui seguenti esempi.

✎ **Esempio 1.2.7.** Sia $E = \mathbb{N}$. Allora E è limitato inferiormente, per esempio da 0 oppure anche da $-\pi$ ecc... perché $-\pi \leq 0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Più in generale \mathbb{N} è limitato inferiormente da ogni reale negativo o nullo. \mathbb{N} non è limitato superiormente; infatti comunque scelto $M > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq M$; basta prendere $n = [M] + 1$, dove $[x]$ denota la PARTE INTERA DI x , cioè il più piccolo intero più piccolo di x . Inoltre $\min \mathbb{N} = 0$ mentre il massimo non esiste.

✎ **Esempio 1.2.8.** Sia E l'insieme degli interi pari relativi. Allora E non è limitato né superiormente né inferiormente, e non esistono né massimo né minimo.

✎ **Esempio 1.2.9.** Sia

$$E := \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Allora E è limitato inferiormente, per esempio da 0 ma anche da ogni numero reale negativo; il minimo però non esiste perché il più grande limite inferiore sarebbe 0 che non appartiene ad E e comunque scelto $e \in E$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $e > \frac{1}{n^2}$. Il massimo invece esiste ed è 1, perché E è fatto da una successione di numeri decrescenti; E è dunque limitato superiormente da 1 ma anche da ogni numero reale maggiore o uguale a 1.

✎ **Esempio 1.2.10.** Sia

$$E := \left\{ \frac{n+2}{n-2} : n \in \mathbb{N}, n > 2 \right\}.$$

Allora posso riscrivere E come

$$E := \left\{ \frac{n-2+4}{n-2} = 1 + \frac{4}{n-2} \right\}$$

quindi è facile verificare che E è limitato superiormente, da 5 e da ogni altro numero reale maggiore o uguale a 5; E è limitato inferiormente da 1 e da ogni altro numero minore o uguale a 1. Il massimo esiste e vale 5, mentre il minimo non esiste (in particolare 1 non appartiene ad E).

Prestiamo ora particolare attenzione a questa serie di esempi, che si differenziano per piccoli (importantissimi!) dettagli. In ogni caso si tratta di insiemi limitati ma non in tutti i casi esiste massimo o minimo.

✎ **Esempio 1.2.11.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E$ e $\max E$ non esistono (sarebbero $x = \mp\sqrt{2}$ che non sono numeri razionali). Si noti che la condizione $x^2 \geq 0$ è sovrabbondante in quanto è sempre vero per ogni x che il suo quadrato è non negativo.

 **Esempio 1.2.12.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E$ e $\max E$ non esistono (sarebbero $x = \mp\sqrt{2}$ che sono esclusi dalle disuguaglianze strette).

 **Esempio 1.2.13.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E$ e $\max E$ non esistono (sarebbero $x = \mp\sqrt{2}$ che non sono numeri razionali).

 **Esempio 1.2.14.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E = -\sqrt{2}$ e $\max E = \sqrt{2}$.

 **Esempio 1.2.15.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E = 0$ e $\max E$ non esiste (sarebbe $x = \sqrt{2}$ che non è razionale).

 **Esempio 1.2.16.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E = 0$ e $\max E$ non esiste (sarebbe $x = \sqrt{2}$ che non appartiene all'insieme).

 **Esempio 1.2.17.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \geq 2, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E = 0$ e $\max E$ non esiste (sarebbe $x = \sqrt{2}$ che non è razionale).

 **Esempio 1.2.18.** Sia

$$E := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Allora $\min E = 0$ e $\max E = \sqrt{2}$.

Quindi gli esempi precedenti mostrano che talvolta, pur essendo l'insieme limitato, non esiste massimo o minimo; inoltre il motivo per cui non esiste dipende fortemente dall'insieme "universo" in cui si sta lavorando.

□ **Definizione 1.2.19.** Sia $E \subseteq X$. Un numero $k \in X$ (non necessariamente $k \in E$) si dice **MAGGIORANTE** di E se $k \geq x$ per ogni $x \in E$.

Un numero $h \in X$ (non necessariamente $h \in E$) si dice **MINORANTE** di E se $h \leq x$ per ogni $x \in E$.

☞ **Osservazione 1.2.20.** Notiamo che un insieme limitato superiormente ha molti maggioranti. Allo stesso modo un insieme limitato inferiormente ha molti minoranti.

□ **Definizione 1.2.21.** Chiameremo **ESTREMO SUPERIORE** di E e lo denoteremo con $\sup E$ il minimo dei maggioranti di E (se esiste).

Analogamente diremo **ESTREMO INFERIORE** di E e lo denoteremo con $\inf E$ il massimo dei minoranti di E (se esiste).

Si può enunciare allora la seguente proprietà:

→ **R4** Ogni insieme $E \subseteq X$ non vuoto e limitato superiormente possiede estremo superiore in X .

□ **Definizione 1.2.22.** Un insieme X totalmente ordinato possiede la **PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE** se soddisfa la proprietà **R4**.

Quindi ad esempio \mathbb{Q} non ce l'ha. Infatti ad esempio se

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

allora $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; mentre \mathbb{R} ce l'ha. È QUESTA LA DIFFERENZA FONDAMENTALE TRA I CAMPI \mathbb{Q} E \mathbb{R} . Possiamo dunque dare una definizione *assiomatica* di \mathbb{R} secondo la seguente definizione.

□ **Definizione 1.2.23.** Chiamiamo \mathbb{R} un insieme che soddisfa le proprietà **R1**, **R2**, **R3**, **R4** e diremo che è un **CAMPO ORDINATO CHE HA LA PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE**.

□ **Definizione 1.2.24.** La proprietà dell'estremo superiore si chiama anche **ASSIOMA DI DEDEKIND** O **ASSIOMA DI CONTINUITÀ**.

Un modo equivalente per enunciare l'assioma di continuità è il seguente.

→ **R4'** Sia $\{A, B\}$ una **PARTIZIONE** di \mathbb{R} (A e B sono diversi dal vuoto, disgiunti e la loro unione è tutto \mathbb{R}). Sia in particolare $\{A, B\}$ una **SEZIONE**, cioè $\forall a \in A, \forall b \in B$ si abbia $a < b$. Allora esiste unico $s \in \mathbb{R}$ detto **ELEMENTO SEPARATORE** tale che

$$a \leq s \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

In particolare risulta $s = \sup A = \inf B$.

1.3. Radicali, potenze e logaritmi

1.3.1. Radici n -esime aritmetiche

Teorema 1.3.1. *Sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ e n intero $n \geq 1$. Allora esiste un unico numero reale positivo x tale che $x^n = y$.*

Tale numero si chiama RADICE ENNESIMA ARITMETICA di y e si indica con $\sqrt[n]{y}$ o $y^{1/n}$.

☞ **Osservazione 1.3.2.** Per quanto detto sopra si osserva che la radice ennesima aritmetica è sempre *non negativa*, esempi: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{x^2} = |x|$; questo accade perché stiamo lavorando in campo reale. In campo complesso naturalmente il comportamento sarà differente (si veda la sezione successiva per maggiori dettagli).

1.3.2. Potenze a esponente reale

L'estrazione di radice ennesima è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza intera. In questo paragrafo vogliamo estendere questa operazione ad *ogni esponente razionale*; questo lo possiamo fare se la base è positiva. Sia dunque

$$r := \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n > 0, \quad a > 0.$$

Allora è ben definita

$$a^r := (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

La definizione si estende allo stesso modo anche se l'esponente è un numero reale (per densità). Supponiamo ora che $a < 0$; allora a^b è definita solo in certi casi particolari, più precisamente se $b \in \mathbb{Z}$ oppure se $b \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{n}{m}$ a patto che non sia n dispari e m pari. Infatti se m è dispari $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$ e in generale $\sqrt[n]{c} = -\sqrt[n]{-c}$. Per esempio:

$$(-2)^{3/5} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}; \quad (-2)^{3/4} = \sqrt[4]{-8} \text{ non esiste in campo reale.}$$

Per le potenze a esponente reale valgono le seguenti proprietà:

- E0** $a^0 = 1 \forall a \neq 0; \quad 1^c = 1 \forall c$
- E1** $a^c > 0 \forall c; \quad a^c \geq 1$ se $a \geq 1$ e $c > 0$
- E2** $a^{c+d} = a^c a^d$
- E3** $(ab)^c = a^c b^c$
- E4** $(a^b)^c = a^{bc}$
- E5** $c < d \Rightarrow a^c \geq a^d$ se $a \leq 1$
- E6** $0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c \forall c > 0$

1.3.3. Logaritmi

Consideriamo l'equazione $a^x = y$ per $a > 0$, y assegnato e x incognito. Se $a = 1$ allora l'equazione precedente ha soluzione se $y = 1$; in tal caso ogni x è soluzione. Se $a \neq 1$ e $y \leq 0$, l'equazione non ha soluzioni. Si ha allora il seguente teorema:

Teorema 1.3.3. *Siano $a > 0$, $a \neq 1$ e $y > 0$. Allora esiste un unico numero reale x tale che $a^x = y$.*

Tale numero prende il nome di LOGARITMO IN BASE a DI y e si indica con $\log_a y$; per definizione si ha dunque

$$a^{\log_a y} = y.$$

Il logaritmo ha le seguenti proprietà dedotte dalle corrispondenti per le potenze a esponente reale:

- L1** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- L2** $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- L3** $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- L4** $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x, \quad \forall x \neq 1$
- L5** $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \forall b > 0, b \neq 1$

1.4. Numeri complessi

L'introduzione del campo dei numeri complessi avviene principalmente per ragioni di natura algebrica. Infatti si pone l'esigenza di ampliare il campo matematico rendendo più naturale il concetto di potenza, visto che a^b ha senso se $a > 0$ mentre se $a < 0$ vale solo in certi casi (equivale a cercare la radice di numeri negativi).

1.4.1. Definizione di \mathbb{C} e struttura di campo

Sia \mathbb{R}^2 l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Su \mathbb{R}^2 è definito in modo naturale l'operazione di *somma*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e quella di *prodotto*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Si verificano facilmente le proprietà *commutativa*, *associativa*, *distributiva*. Inoltre $(0, 0)$ è *l'elemento neutro* della somma, cioè si ha

$$\forall(a, b), (a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

mentre $(1, 0)$ è *l'elemento neutro per il prodotto*, ossia

$$\forall(a, b), (a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

Inoltre per ogni (a, b) è possibile definire *l'elemento opposto* di (a, b) che indicheremo con $(-a, -b)$ e si ha

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

e analogamente, per ogni $(a, b) \neq (0, 0)$ è possibile definire *il reciproco* di (a, b) che indicheremo con $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ tale per cui si abbia

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

Si verifica quindi che \mathbb{R}^2 con queste operazioni è un campo che chiameremo CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI e indicheremo con la lettera \mathbb{C} .

Sia ora \mathbb{C}_0 un sottocampo di \mathbb{C} formato dall'insieme delle coppie del tipo $(a, 0)$ con il secondo elemento della coppia uguale a 0. In tal caso le operazioni di somma e prodotto si riducono a

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Quindi su \mathbb{C}_0 è possibile introdurre una relazione d'ordine $<$ in modo tale che diventi un campo ordinato: infatti si ha

$$a < b \rightarrow (a, 0) < (b, 0).$$

È quindi possibile *mettere in corrispondenza biunivoca* \mathbb{R} con \mathbb{C}_0 nel modo seguente

$$(a, 0) \leftrightarrow a$$

in modo tale da poter IDENTIFICARE i due insiemi \mathbb{R} e \mathbb{C}_0 . In questo senso il campo dei numeri complessi si può vedere come un *ampliamento* del campo dei numeri reali.

☞ **Osservazione 1.4.1.** Notiamo che

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Quindi abbiamo trovato un numero complesso tale che il suo quadrato coincida con il numero reale $(-1, 0)$ (che può essere identificato con -1). Per l'importanza (anche storica) di questo numero complesso, gli viene dato il nome di UNITÀ IMMAGINARIA e si indicherà con $(0, 1) = i$.

A questo punto andiamo a semplificare le notazioni. Si ha

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$$

che viene denominata FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI. A questo punto allora

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

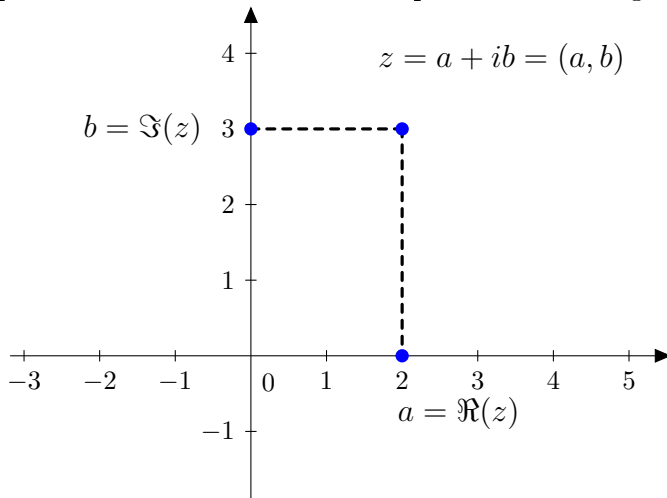
e

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Se $z = a + ib$, a si dice PARTE REALE DI z e si indica con $\Re(z)$ mentre b si dice PARTE IMMAGINARIA DI z e si indica con $\Im(z)$.

☞ **Osservazione 1.4.2.** Si noti che a e b sono NUMERI REALI!!!.

Vista l'identificazione tra \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} , per il campo dei numeri complessi c'è un'interessante interpretazione geometrica. Infatti il numero complesso $z = a + ib$ può essere identificato con il punto di coordinate (a, b) e la rappresentazione grafica avviene nel cosiddetto *piano complesso* o PIANO DI GAUSS; l'asse x è identificato con l'asse reale, l'asse y con l'asse immaginario e per sommare due numeri complessi vale la regola del parallelogramma (come con i vettori).



☞ **Osservazione 1.4.3.** Si noti che \mathbb{C} con le operazioni introdotte prima è un campo, ma non è un campo ordinato. Infatti ricordando le proprietà introdotte nella Sezione 1.2.2, è possibile far vedere che non si può introdurre una relazione d'ordine tale che valga la proprietà **R3**. Infatti, se così fosse, si arriverebbe a una contraddizione: basta considerare il fatto che $a^2 \geq 0$ per ogni a reale, mentre nel campo complesso si ha $i^2 = -1$.

□ **Definizione 1.4.4.** Si dice COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso $z = a + ib$ il numero complesso $\bar{z} = a - ib$.

Si noti che

$$z + \bar{z} = 2\Re(z), \quad z - \bar{z} = 2i\Im(z).$$

Elenchiamo ora alcune semplici proprietà dell'operazione di coniugio. Si ha

$$(i) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$(ii) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$(iii) \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$(iv) \overline{\bar{z}} = z$$

$$(v) z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Quest'ultima proprietà è particolarmente interessante perché ci dice che il prodotto di un numero complesso per il suo coniugio dà un numero reale, la cui radice quadrata prende il nome di MODULO DI z e si indica con $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Quindi $|z|^2 = z \bar{z}$; se $z \in \mathbb{R}$ allora il suo modulo coincide con il valore assoluto.

Elenchiamo alcune proprietà del modulo di un numero complesso che possono essere facilmente verificate per esercizio.

$$1) |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$2) |z| = |\bar{z}|$$

$$3) |\Re(z)| \leq |z|, \quad |\Im(z)| \leq |z|$$

$$4) |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$$

$$5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE}$$

$$6) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

Il modulo di un numero complesso ha anche un'interessante *interpretazione geometrica*. Infatti $|z|$ rappresenta la distanza del numero complesso (o del punto nel piano di Gauss) dall'origine. In particolare $|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* di due numeri complessi. Quindi le proprietà 5) e 6) di cui sopra si interpretano geometricamente con il ben noto fatto che in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

□ **Definizione 1.4.5.** Il QUOZIENTE di numeri complessi si definisce nel modo seguente

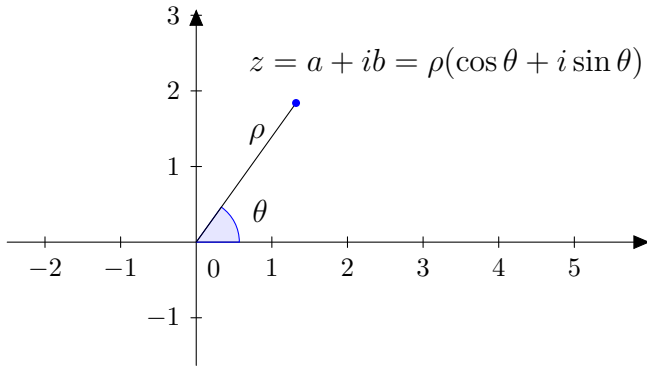
$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

1.4.2. Forma trigonometrica dei numeri complessi

Com'è noto dalla geometria analitica, per individuare un punto nel piano cartesiano si possono usare sia le coordinate cartesiane che le coordinate polari. In tal caso un punto nel piano

viene individuato dalla coppia (ρ, θ) dove ρ è il raggio e θ è l'angolo polare, cioè l'angolo che la retta che congiunge il punto con l'origine forma con la direzione positiva dell'asse delle x , individuato a meno di multipli di 2π .

Nel caso dei numeri complessi, il raggio polare coincide con il *modulo* di z mentre si indica con $\arg(z)$ l'*argomento* di z uno degli angoli θ . Nel caso se ne voglia indicare uno in particolare, si chiamerà *argomento principale*. Es. $\theta \in [0, 2\pi)$ oppure $\theta \in [-\pi, \pi]$.



Se partiamo dalla forma algebrica di un numero complesso $z = a + ib$, dalle classiche relazioni di trigonometria si ha

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \theta \\ b &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

quindi la formula $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ indica la FORMULA TRIGONOMETRICA di un numero complesso z . In particolare si hanno le seguenti relazioni

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1.4.3. Potenze di numeri complessi

Per prima cosa introduciamo la FORMULA DI DE MOIVRE, utile per esprimere in modo comodo prodotti e quozienti di numeri complessi. Si richiede che i numeri complessi siano espressi in forma trigonometrica.

Proposizione 1.4.6. *Siano $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ due numeri complessi di dati moduli ρ_i e argomenti θ_i , per $i = 1, 2$. Allora si ha*

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

e se $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Quindi il prodotto (o il quoziente) di due numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto (o il quoziente) dei moduli e per argomento la somma (o la differenza) degli

argomenti. La formula si può per induzione generalizzare a un numero qualsiasi di fattori, per esempio

$$z_1 z_2 \dots, z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)).$$

Infine se tutti i fattori sono uguali, la formula di De Moivre si riduce alla seguente

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

La dimostrazione si basa sulle regole di base di trigonometria su seno e coseno di somme o differenze.

✎ **Esempio 1.4.7.** Calcolare $(1 + i)^{16}$.

Ponendo $z = (1 + i)$ si ha che $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg(z) = \pi/4$. Da cui

$$|(1 + i)^{16}| = (\sqrt{2})^{16} = 2^8 = 256; \quad \arg(1 + i)^{16} = 16 \frac{\pi}{4} = 4\pi.$$

Quindi si ha

$$(1 + i)^{16} = 256(\cos(4\pi) + i \sin(4\pi)) = 256.$$

1.4.4. Radici n -esime di numeri complessi

□ **Definizione 1.4.8.** Dato un numero complesso w , diremo che z è una RADICE N -ESIMA COMPLESSA di w se risulta $z^n = w$.

Teorema 1.4.9. Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$ intero. Allora esistono esattamente n radici ennesime complesse z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di w . Inoltre posto $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, si ha che $z_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ dove

$$\begin{cases} \rho_k = r^{1/n} \\ \theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

☞ **Osservazione 1.4.10.** • Se siamo in campo reale, $\sqrt{4} = 2$; invece se siamo in campo complesso $\sqrt{4} = +2$ e -2 .

• Se consideriamo le equazioni di secondo grado, ci sono sempre due soluzioni in campo complesso, anche se il discriminante viene negativo. Invece nel campo reale ci possono essere due soluzioni oppure una sola (con molteplicità 2) oppure nessuna soluzione.


• Le radici ennesime di un numero complesso hanno un'interessante interpretazione geometrica nel piano di Gauss: infatti sono i vertici di un poligono regolare di n lati.

Teorema 1.4.11. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un'equazione polinomiale

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0, \quad a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi ha esattamente n radici in \mathbb{C} , ognuna contata con la sua molteplicità.

 **Esempio 1.4.12.** Scrivere le radici cubiche di $i - 1$.

Sia $w = i - 1 = -1 + i$ di cui dobbiamo individuare le radici cubiche (quindi si tratta di 3 radici). Prima di tutto occorre scrivere w in forma trigonometrica per cui si ottiene facilmente che

$$r = |w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$

inoltre

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

da cui $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Quindi la forma trigonometrica del numero complesso w è

$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right).$$

A questo punto, se z è una radice cubica allora $|z| = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$, mentre se indichiamo con θ l'argomento di z si ottiene

$$\theta = \frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

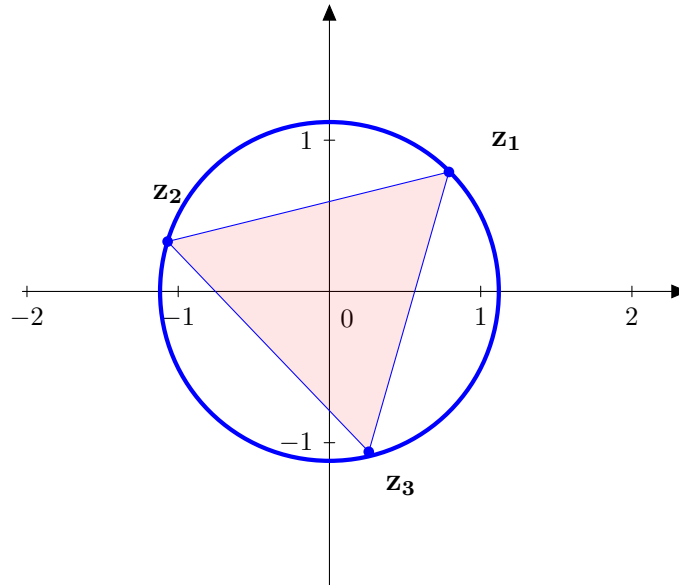
Allora gli argomenti delle tre radici cubiche sono esattamente

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi \\ \theta_3 &= \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi. \end{aligned}$$

Quindi le tre radici cubiche sono

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi \right) \\ z_3 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi \right). \end{aligned}$$

Le tre radici cubiche stanno ai vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$, come mostrato in figura.



1.5. Complementi

1.5.1. Valore assoluto

□ **Definizione 1.5.1.** Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora il VALORE ASSOLUTO di a si indica con $|a|$ ed è definito come segue:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

☞ **Osservazione 1.5.2.** Osserviamo che

$$\forall a \geq 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Proposizione 1.5.3. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE} \quad (1.5.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Dall'osservazione precedente si ha che

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sommando le due quantità membro a membro si ottiene

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.5.4. *Dalla (1.5.1) si deducono le seguenti disuguaglianze (anch'esse vanno sotto il nome di DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI*

$$\forall a, b, c \quad |a - b| \leq |a - c| + |b - c| \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (1.5.1) si ottiene la prima disuguaglianza ponendo $x = a - c$ e $y = b - c$. Per quanto riguarda invece la seconda disuguaglianza, prima si usa la (1.5.1) con la scelta $x = a - b$ e $y = b$ da cui

$$|a| \leq |a - b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b|;$$

analogamente scambiando i ruoli tra a e b si ottiene

$$|b| \leq |a - b| + |a| \quad \Rightarrow \quad |b| - |a| \leq |a - b|;$$

da cui la tesi. \square

La quantità $|a - b|$ geometricamente rappresenta la distanza tra due punti a e b nel senso della geometria elementare. Abbiamo inoltre che

$$|ab| = |a| |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad |a| = |-a|.$$

1.5.2. Sommatorie

Per indicare in modo compatto una somma finita, si usa il simbolo di sommatoria.

\square **Definizione 1.5.5.** La SOMMATORIA per i che va da 1 a n di a_i si indica con

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;$$

i si chiama INDICE DELLA SOMMATORIA.

 **Esempio 1.5.6.**

$$\sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{5269}{3600}$$

È bene notare che l'indice è muto, cioè

$$\sum_{i=3}^n i^2 = \sum_{j=3}^n j^2$$

mentre vale

$$\sum_{i=3}^n i^2 \neq \sum_{i=3}^m i^2, \quad n \neq m.$$

Le proprietà fondamentali della sommatoria sono:

1) **PRODOTTO PER UNA COSTANTE (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)**

$$\sum_{k=1}^n (c a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$$

2) **SOMMATORIA CON TERMINE COSTANTE**

$$\sum_{k=1}^n c = c n$$

3) **SOMMA DI SOMMATORIE**

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

4) **SCOMPOSIZIONE**

$$\sum_{k=1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k$$

5) **TRASLAZIONE DI INDICI**

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$

6) **RIFLESSIONE DI INDICI**

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

Le proprietà della sommatoria possono essere usate per calcolare la **SOMMA DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA**.

□ Definizione 1.5.7. Si dice che n termini sono in **PROGRESSIONE GEOMETRICA** se il rapporto tra ogni termine (a partire dal secondo) è costante. Tale costante si dice **RAGIONE DELLA PROGRESSIONE**

📎 Esempio 1.5.8. La **progressione geometrica** di primo termine a e ragione q è data da

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.5.9. Per la somma dei primi termini della progressione geometrica vale la formula (vera per $a = 1$ e ragione $q \neq 1$)

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Se $q = 1$, la sommatoria vale semplicemente $n + 1$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la seguente formula equivalente alla tesi

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k &\stackrel{1)}{=} \sum_{k=0}^n (1 - q) q^k = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) \stackrel{2)}{=} \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} \\ &\stackrel{3)}{=} \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + \sum_{k=1}^n q^k - \left(\sum_{k=1}^n q^k + q^{n+1} \right) = 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Dal paragrafo precedente, possiamo dedurre, iterando n volte la disuguaglianza triangolare

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

1.5.3. I numeri naturali e il principio di induzione

I numeri naturali sono costruiti a partire dall'elemento 0, da un insieme \mathbb{N} e da un'operazione di "successivo" (indicata con s) verificanti i seguenti assiomi detti *assiomi di Peano*.

- 1) $0 \in \mathbb{N}$;
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \in \mathbb{N}$;
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, s(n) \neq 0$;
- 4) $\forall m, n \in \mathbb{N}, s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$;
- 5) $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \{(0 \in A) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, n \in A \Rightarrow s(n) \in A)\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

Il primo assioma afferma che \mathbb{N} non è vuoto; il secondo assioma garantisce che per ogni numero ci sia un successivo, mentre il terzo ci dice che 0 non ha un precedente; il quarto assioma afferma invece che non è possibile tornare ad un numero già incontrato. Infine il quinto assioma è

equivalente al seguente principio largamente utilizzato per dimostrare proprietà che dipendono da numeri naturali.

Principio di induzione Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà vera per $n = 0$. Supponiamo che se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora sia vera anche $\mathcal{P}(n + 1)$. Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n .

Dimostrazione dell'equivalenza tra il principio di induzione e il quinto assioma di Peano.

Supponiamo vero il quinto assioma di Peano e consideriamo l'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\}$. Per ipotesi $0 \in A$ e inoltre se $n \in A$ allora anche $n + 1 = s(n) \in A$. Dunque, per il quinto assioma, $A = \mathbb{N}$ e quindi $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n .

Viceversa, supponiamo vero il principio di induzione. Sia A un insieme che contiene 0, e il successivo di ogni suo elemento. Consideriamo il predicato $\mathcal{P}(n)$ con $n \in A$. Allora, intanto $\mathcal{P}(0)$ è vera; inoltre se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n + 1)$ è vera. Allora per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n e quindi $A = \mathbb{N}$. \square

1.5.4. Fattoriale e coefficienti binomiali

\square **Definizione 1.5.10.** Per induzione definiamo **N FATTORIALE** (che indicheremo col simbolo $n!$) come segue

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n + 1)! = n!(n + 1). \end{cases}$$

Il fattoriale di n rappresenta il prodotto dei primi n interi consecutivi. Quindi dalla definizione precedente si ricava che

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

Il fattoriale cresce molto rapidamente; inoltre se $0 < k < n$ si ha

$$\frac{n!}{(n - k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1).$$

Il fattoriale di n ha numerose applicazioni nel calcolo combinatorio, per esempio per calcolare le permutazioni di n oggetti.

\pencil **Esempio 1.5.11.** Se dobbiamo calcolare le permutazioni di 3 oggetti a, b, c , si dimostra che essi possono essere ordinati in $3! = 6$ modi diversi, ossia

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

Proposizione 1.5.12. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha la **FORMULA DI NEWTON**

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ volte}} = \sum_{k=0}^n c_{n,k} a^k b^{n-k}, \quad (1.5.2)$$

dove $c_{n,k}$ sono i COEFFICIENTI BINOMIALI (utilizzati nelle applicazioni soprattutto in Probabilità e Statistica) e sono definiti come segue:

$$c_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Quindi

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

e la formula di Newton può essere riscritta come

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Procediamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$ banalmente (1.5.2) è verificata.

Supponiamo ora che (1.5.2) valga per n . Allora, moltiplicando per $(a+b)$ ambo i membri della (1.5.2), si ha

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (a^{k+1} b^{n-k} + a^k b^{n+1-k}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Chiaramente si ha

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{n!}{(h-1)!(n+1-h)!} a^h b^{n+1-h}.$$

Essendo ora h variabile muta si ottiene che

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^k b^{n+1-k} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \right).$$

D'altra parte si ha

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

da cui la tesi. \square

Due proprietà importanti dei coefficienti binomiali sono le seguenti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

e

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Il calcolo dei coefficienti binomiali è utile per costruire il TRIANGOLO DI TARTAGLIA che dà i coefficienti della formula delle potenze di un binomio.

CAPITOLO 2

Funzioni reali di una variabile reale

2.1. Generalità

Il concetto di *funzione* nasce per descrivere matematicamente il concetto di *grandezza variabile*. L'esistenza di una grandezza variabile sottointende l'esistenza di una *relazione tra due grandezze* (es. tempo, velocità...) ovvero la *dipendenza di una grandezza dall'altra*. Per esempio in fisica:

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 + at & t &\mapsto v(t) \\s(t) &= s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 & t &\mapsto s(t)\end{aligned}$$

dove v , a e s rappresentano rispettivamente velocità, accelerazione e spostamento di un punto materiale. Altre relazioni nascono nel contesto economico, biologico, ingegneristico...

Tutti questi esempi sono caratterizzati dalla presenza di un *numero reale* (in ingresso) a cui si associa UNIVOCAMENTE un altro *numero reale* (in uscita). Quindi una funzione è caratterizzata dalla UNIVOCITÀ DELLA CORRISPONDENZA tra input e output. Naturalmente si possono fare delle restrizioni naturali sui valori in ingresso che dipendono dal significato e dal contesto in cui si opera. Inoltre il concetto di funzione non è limitato al caso di funzioni di una variabile reale ma si può estendere al caso in cui per esempio in ingresso si abbiano coppie di numeri o insiemi non numerici ecc...

Possiamo quindi arrivare alla seguente definizione.

□ Definizione 2.1.1. Dati due insiemi A e B qualsiasi, una FUNZIONE di DOMINIO A a valori in B (B è anche detto CODOMINIO) è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B . L'uscita corrispondente a un valore in ingresso si dice IMMAGINE di quel valore. L'insieme delle possibili uscite si dice IMMAGINE del dominio tramite f .

In generale quindi $f : A \rightarrow B$ e $f(A) \subseteq B$.

In questo corso noi ci occuperemo di

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{successioni} \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{funzioni reali di una variabile reale.} \end{aligned}$$

Altre funzioni di interesse che si trattano in altri contesti sono

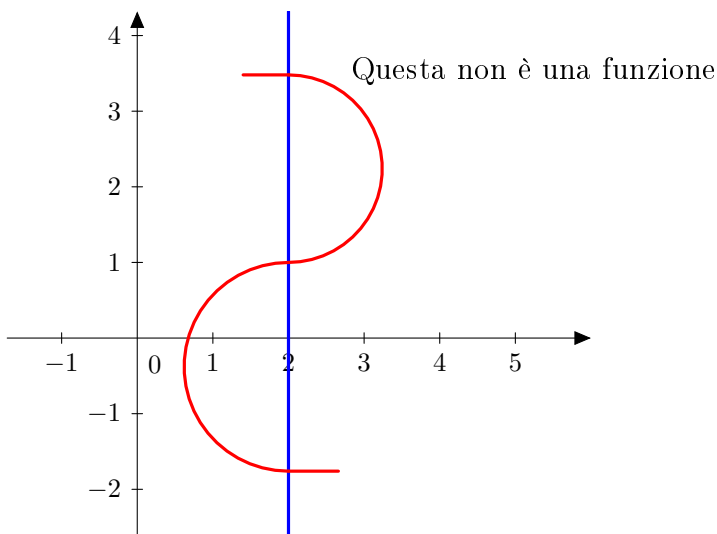
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \text{ lineari} && \text{trasformazioni lineari (algebra lineare)} \\ f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \text{ non nec. lineari} && \text{funzioni vettoriali di pi\u00f9 variabili reali (An. II).} \end{aligned}$$

Torniamo per ora al caso di una funzione reale di una variabile reale. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f : x \mapsto f(x)$.

□ **Definizione 2.1.2.** Il grafico di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \u00e8 l'insieme

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}.$$

☞ **Osservazione 2.1.3.** C' \u00e8 un'interessante interpretazione geometrica del fatto che ad ogni valore in ingresso corrisponda una e una sola uscita. Infatti ogni retta parallela all'asse delle ordinate che taglia l'asse delle ascisse in $x \in D$ interseca il grafico di f in un solo punto.



2.2. Funzioni limitate

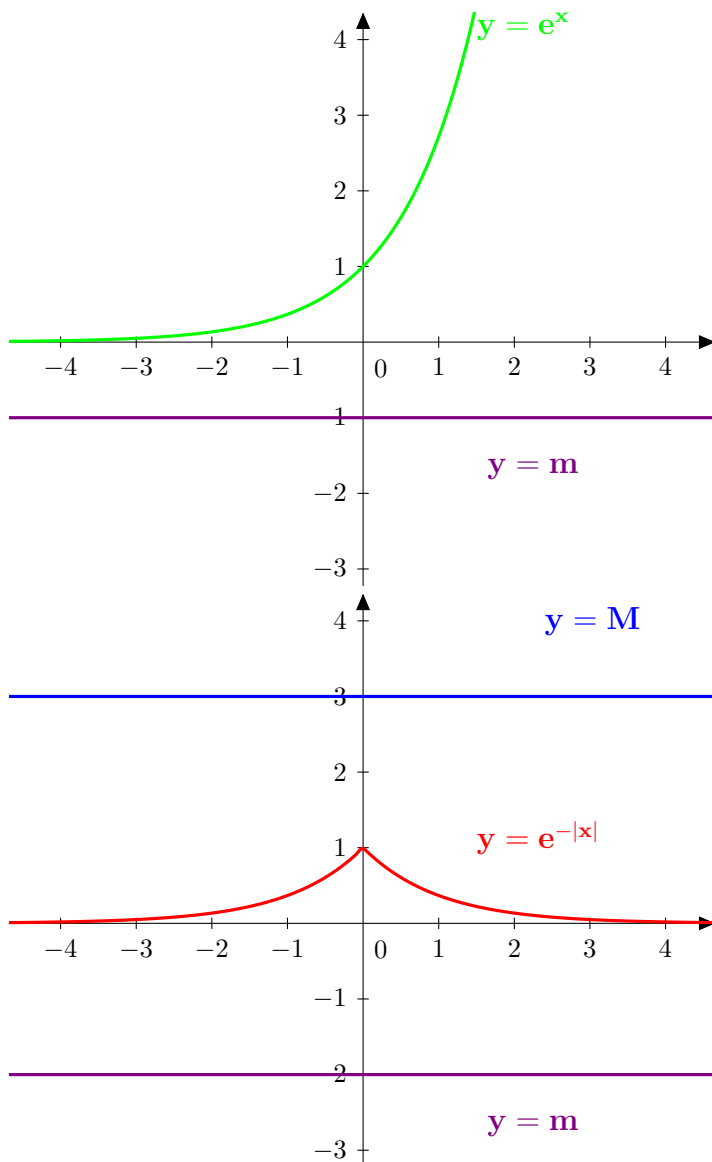
Abbiamo visto nella Sezione 1.2.2 il concetto di insieme limitato superiormente (e/o inferiormente) e il concetto di estremo superiore (e/o inferiore). Vediamo come tali concetti si applicano anche al caso delle funzioni.

□ **Definizione 2.2.1.** Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è LIMITATA SUPERIORMENTE se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M, \forall x \in D$. In altre parole f è limitata superiormente se il grafico di f è contenuto nel semipiano inferiore delimitato da $y = M$ (o anche se l'immagine di D tramite f è un sottoinsieme limitato superiormente).

Si dice che f è LIMITATA INFERIORMENTE se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq m, \forall x \in D$. In altre parole f è limitata inferiormente se il grafico di f è contenuto nel semipiano superiore delimitato da $y = m$ (o anche se l'immagine di D tramite f è un sottoinsieme limitato inferiormente)

Si dice che f è LIMITATA se è limitata inferiormente e superiormente (il suo grafico è contenuto in una striscia, o anche se l'immagine di D tramite f è un sottoinsieme limitato).

✎ **Esempio 2.2.2.** $x \mapsto e^x$ è limitata inferiormente ma non superiormente; $x \mapsto e^{-|x|}$ è limitata inferiormente e superiormente.



2.3. Funzioni simmetriche

Esistono funzioni il cui grafico presenta delle particolari simmetrie e vengono classificate in questo modo.

□ **Definizione 2.3.1.** Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f si dice **PARI** se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate cioè se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in D$. f si dice **DISPARI** se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

✎ **Esempio 2.3.2.** $f(x) = x^2$ è pari e più in generale sono pari le funzioni $g(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.
 $f(x) = x^3$ è dispari e più in generale sono dispari le funzioni $h(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
 $f(x) = \cos x$ è pari mentre $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \tan x$ sono funzioni dispari.
 $f(x) = |x|$ è pari mentre $f(x) = x$ è dispari.
 $f(x) = e^x$ non è né pari né dispari.

✎ **Osservazione 2.3.3.** Esistono funzioni che hanno grafico simmetrico rispetto all'asse x ? Ovviamente NO, perché la funzione è caratterizzata come già osservato dall'unicità della corrispondenza input-output quindi ad ogni valore di x non possono essere associati più valori di $f(x)$.

2.4. Funzioni monotone

□ **Definizione 2.4.1.** Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora f si dice **MONOTONA CRESCENTE** se accade che

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Analogamente f si dice **MONOTONA DECRESCENTE** se accade che

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Se le disuguaglianze precedenti sono strette si dice che f è **MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE** (RISP. **DECRESCENTE**).

Il significato della crescita (risp. decrescenza) di una funzione si può spiegare osservando che all'aumentare di x anche il grafico di f aumenta (risp. diminuisce).

✎ **Esempio 2.4.2.** $x \mapsto x^3$ è strettamente crescente.

$x \mapsto 5$ è “non crescente” e “non decrescente” quindi costante.

$x \mapsto e^{-x}$ è strettamente decrescente.

$x \mapsto \sin x$ non è né crescente né decrescente, ma la stessa funzione ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è strettamente crescente. Queste considerazioni saranno importanti quando parleremo di invertibilità.

2.5. Funzioni periodiche

□ Definizione 2.5.1. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è PERIODICA DI PERIODO T con $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale positivo tale che $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$. Ogni intervallo di lunghezza T si dice INTERVALLO DI PERIODICITÀ.

La caratteristica delle funzioni periodiche è che basta determinarne il comportamento su un intervallo di periodicità per conoscerle ovunque. Le più classiche funzioni periodiche sono naturalmente seno, coseno e tangente che analizzeremo in dettaglio tra poco.

2.6. Funzioni elementari

2.6.1. Funzioni potenza

Sono le funzioni della forma

$$f(x) = k x^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad k, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha > 0$ sono definite in generale per $x \geq 0$; se $\alpha < 0$ sono definite solo per $x > 0$. Quando sono definite per $x < 0$? Se l'esponente è intero oppure se l'esponente è razionale con denominatore dispari, cioè nel caso $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ e n intero dispari.

2.6.2. Funzioni esponenziali e logaritmiche

Le funzioni esponenziali/logaritmiche modellizzano fenomeni di crescita o decadimento (es: decadimento radioattivo, processi di raffreddamento, diffondersi di un'infezione...) Le funzioni trigonometriche, che vedremo nel paragrafo successivo, modellizzano invece il moto dei pianeti, la propagazione delle onde, il moto di un pendolo ecc...

□ Definizione 2.6.1. Sia $a > 0$ con $a \neq 1$ e sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione $f(x) = \log_a x$ si dice FUNZIONE LOGARITMO IN BASE a .

□ Definizione 2.6.2. Sia $a > 0$ con $a \neq 1$ e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione $g(x) = a^x$ si dice FUNZIONE ESPONENZIALE DI BASE a .

La relazione fondamentale che vale è la seguente che deriva direttamente dalla definizione di logaritmo

$$x = a^{\log_a x}, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

e dunque

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

☞ **Osservazione 2.6.3.** Da notare la differenza tra le seguenti funzioni (potenza ed esponenziale) il cui comportamento è chiaramente diverso

$$x \mapsto x^a \neq x \mapsto a^x.$$

La base naturale di funzioni esponenziali e logaritmi è il NUMERO DI NEPERO $e \sim 2,7$. Tale numero verrà introdotto nel capitolo successivo come limite di una opportuna successione.

2.6.3. Funzioni trigonometriche

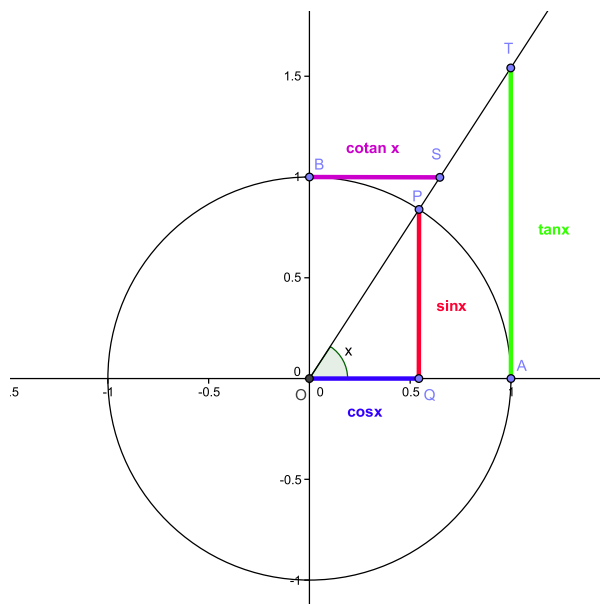
Le principali funzioni trigonometriche sono: seno, coseno, tangente. Si indicano

$$x \mapsto \sin x$$

$$x \mapsto \cos x$$

$$x \mapsto \tan x$$

x ha il significato di misura in radianti di un angolo.



In figura sono illustrati come sono definiti seno, coseno, tangente e cotangente sulla CIRCONFERENZA GONIOMETRICA che è una circonferenza di raggio unitario. In particolare x rappresenta l'angolo (in radianti); seno e coseno sono i cateti del triangolo rettangolo OAP la cui ipotenusa vale 1 perché raggio della circonferenza. È chiaro che poi facendo variare x il comportamento di questi segmenti varierà di conseguenza. I grafici sono dedotti proprio dalla costruzione geometrica e si trovano in fondo al capitolo.

Le relazioni fondamentali sono tre:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

che deriva dall'applicazione del Teorema di Pitagora al triangolo OQP notando che siamo sulla circonferenza goniometrica, e quindi di raggio 1;

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

che deriva da una similitudine tra i triangoli OPQ e OTA ;

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

che deriva da una similitudine tra i triangoli OPQ e OBS .

Andiamo ora a studiare le principali caratteristiche delle funzioni trigonometriche. Sia

$$x \mapsto \sin x$$

$$x \mapsto \cos x$$

Si ha: dominio \mathbb{R} ; immagine $[-1, 1]$. Sono funzioni periodiche di periodo 2π . Il seno è una funzione dispari mentre il coseno è una funzione pari, infatti si ha

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x).$$

Infine si ha la relazione

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

quindi la funzione seno si ottiene dalla funzione coseno tramite uno sfasamento di x pari a $\pi/2$ (traslazione del grafico verso destra).

Per quanto riguarda la funzione

$$x \mapsto \tan x$$

si ha: dominio $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; immagine \mathbb{R} . È una funzione periodica di periodo π ed è una funzione dispari, infatti si ha $\tan(-x) = -\tan(x)$.

2.6.4. Funzione parte intera e mantissa

La PARTE INTERA di un numero reale x , denotata con $[x]$ è quell'intero n tale che $n \leq x < n+1$, quindi il più grande intero più piccolo (o uguale) a x . Esempi: $[2,5] = 2$; $[3,1] = 3$; $[4] = 4$; $[-5,2] = -6$. Il grafico è mostrato alla fine del capitolo.

La differenza tra un numero reale e la sua parte intera prende il nome di MANTISSA si indica con $(x) = x - [x]$ ed è un numero reale compreso tra 0 e 1. Anche questo grafico è mostrato in fondo al capitolo. La funzione mantissa è una funzione periodica.

2.6.5. Funzioni iperboliche

Si tratta di funzioni definite tramite esponenziali. Abbiamo le funzioni SENO IPERBOLICO, COSENO IPERBOLICO E TANGENTE IPERBOLICA. Il seno iperbolico è definito come segue

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Il coseno iperbolico è definito come segue

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

mentre la tangente iperbolica è definita come segue

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Il dominio di queste funzioni è \mathbb{R} . Seno iperbolico e tangente iperbolica sono funzioni dispari mentre coseno iperbolico è una funzione pari, cioè si ha

$$\sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \cosh(-x) = \cosh(x) \quad \tanh(-x) = -\tanh(x).$$

Inoltre

$$\sinh(0) = 0 \quad \cosh(0) = 1 \quad \tanh(0) = 0 \quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

2.7. Funzioni composte

In generale, date due funzioni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(E) \subseteq F$ cioè $\forall x \in E, f(x) \in F$, si può definire la funzione composta di f e g

$$g \circ f =: h : E \rightarrow \mathbb{R}$$


tale che

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

agisca come segue

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

In generale, può risultare che siano ben definite sia $g \circ f$ che $f \circ g$ ma usualmente sarà $g \circ f \neq f \circ g$.

 **Esempio 2.7.1.** Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 2$. Allora

$$f \circ g(x) : x \mapsto x - 2 \mapsto (x - 2)^2 \quad g \circ f(x) : x \mapsto x^2 \mapsto x^2 - 2$$


e in generale $(x - 2)^2 \neq x^2 - 2$.

Quindi la composizione di funzioni non è in generale commutativa; però si dimostra che è associativa, cioè si ha

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Se una funzione è tale che $f(D) \subseteq D$ allora tale funzioni si può comporre con se stessa, ottenendo

$$\begin{array}{ll} f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) & \text{iterata seconda} \\ \vdots & \\ f^n(x) = f \circ f \circ \dots \circ f(x) = f(f(f(\dots f(x)))) & \text{iterata ennesima} \end{array}$$

 **Osservazione 2.7.2.** Quando si chiede di determinare il dominio della funzione composta, occorre sempre prestare attenzione. Infatti in generale il dominio è dato dall'intersezione tra il dominio della funzione di partenza e il dominio della funzione in arrivo; una valutazione non attenta può portare a conclusioni errate. Ad esempio, se $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 4$ allora $g \circ f(x) = x - 3$ il cui dominio non è \mathbb{R} come sembrerebbe a prima vista, ma $x \geq -1$, perché se si prende x al di fuori di questo dominio, la f non è nemmeno applicabile e quindi non ha nemmeno senso scrivere la funzione composta.

2.8. Funzioni invertibili e funzioni inverse

2.8.1. Generalità

Sia data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Questo significa, per definizione di funzione, che

$$\forall x \in D, \exists ! f(x)$$

essendo le funzioni caratterizzate, come si è più volte detto, dalla univocità della corrispondenza input-output.

Se accade anche che

$$\forall y \in f(D), \exists! x \in D : f(x) = y,$$

allora f si dice INVERTIBILE e si realizza una *corrispondenza biunivoca* tra D e $f(D)$.

Formalmente:

□ **Definizione 2.8.1.** Si dice che una funzione è INIETTIVA se accade che

$$\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ o equiv. } \forall x_1, x_2 \in D, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2;$$

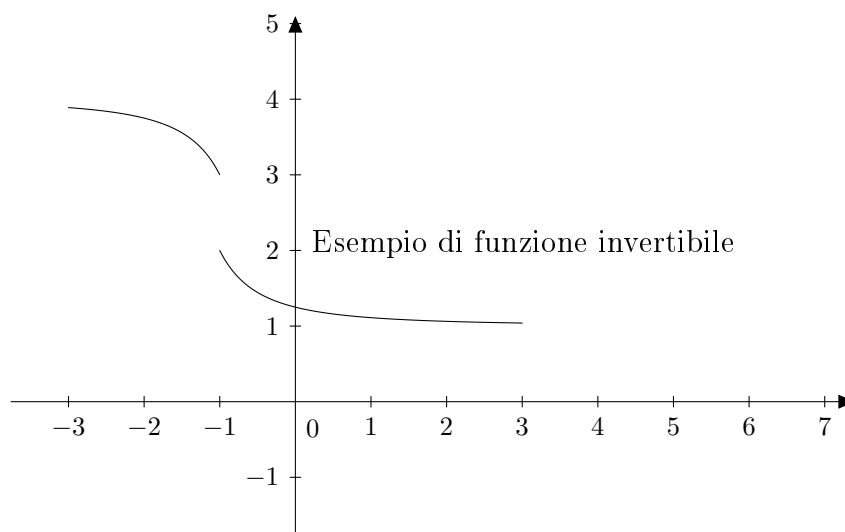
si dice che una funzione è SURIETTIVA O SURGETTIVA se accade che

$$\forall y \in f(D), \exists x \in D : f(x) = y;$$

si dice che una funzione è BIUNIVOCA O BIETTIVA O BIGETTIVA se accade che

$$\forall y \in f(D), \exists! x \in D : f(x) = y.$$

La funzione che per ogni $y \in f(D)$ associa l'unico elemento $x \in D$ tale che si abbia $f(x) = y$ si chiama FUNZIONE INVERSA e si indica con il simbolo f^{-1} (non si confonda la funzione inversa f^{-1} con la funzione $\frac{1}{f}$ che in generale sono ben diverse!).



Quindi riassumendo

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \iff \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

C'è un'interessante interpretazione geometrica della condizione di invertibilità: se f è invertibile, allora il grafico di f può essere intersecato al massimo in un solo punto da ogni retta parallela all'asse delle x .

✎ **Esempio 2.8.2.** $y = x^2$ non è invertibile sul suo naturale dominio di definizione (che è \mathbb{R}); infatti essendo una funzione pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y e quindi ogni retta parallela all'asse delle x del tipo $y = k$ interseca il grafico in due punti (se $k > 0$ naturalmente). Tuttavia la restrizione della stessa funzione al dominio $x \geq 0$ è invertibile e la sua inversa è \sqrt{x} (ed è anche questo un motivo per cui la radice quadrata di un numero la si calcola solo per reali positivi o nulli e dà come output un numero positivo o nullo).

In generale quindi sicuramente non sono invertibili nel loro naturale dominio di definizione sia le funzioni simmetriche pari che le funzioni periodiche.

Vale il seguente importantissimo risultato.

Teorema 2.8.3. Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente monotona in D è invertibile in D . Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f sia strettamente crescente. Allora presi $x_1, x_2 \in D$ dobbiamo provare che

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Se $x_1 \neq x_2$ allora possono accadere solo due casi: $x_1 < x_2$ oppure $x_1 > x_2$. Allora, dalla crescita (stretta!) di f si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ oppure } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

In entrambi i casi si ottiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ da cui la tesi. Il caso in cui f è strettamente decrescente si tratta in modo analogo.

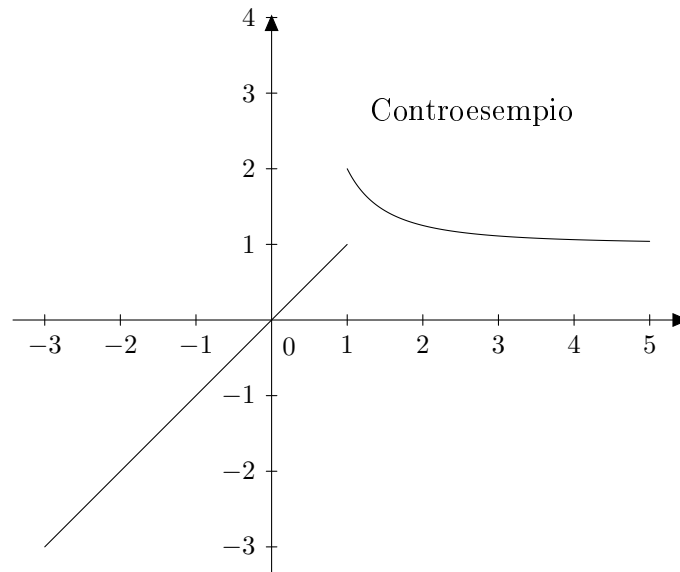
Ora proviamo che f^{-1} è strettamente crescente se f lo è. Sia $y_1 < y_2$; dobbiamo far vedere che $x_1 < x_2$, dove $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2$. Supponiamo per assurdo che sia $x_1 \geq x_2$; allora visto che f è strettamente crescente, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ cioè $y_1 \geq y_2$, il che è assurdo. Questo permette di concludere. \square

\square **Definizione 2.8.4.** Date due proposizioni \mathcal{P} e \mathcal{Q} , si dice che:

\mathcal{P} è CONDIZIONE NECESSARIA per \mathcal{Q} se $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$;

\mathcal{P} è CONDIZIONE SUFFICIENTE per \mathcal{Q} se $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$;

☞ **Osservazione 2.8.5.** Dal Teorema 2.8.3 si evince che se una funzione è strettamente monotona è invertibile, quindi la stretta monotonia è condizione sufficiente per l'invertibilità. Siccome però non vale il viceversa, come da controesempio in figura, cioè una funzione può essere invertibile anche senza essere strettamente monotona, la stretta monotonia non è condizione necessaria per l'invertibilità.



Riassumendo:

f strettamente monotona $\Rightarrow f$ invertibile f invertibile $\nRightarrow f$ strettamente monotona.
--

☞ **Osservazione 2.8.6.** C'è un'interessante interpretazione geometrica riguardo i grafici di una funzione e della sua inversa: infatti sono *simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante*. Alcuni esempi sono riportati in fondo al capitolo.

2.8.2. Funzioni trigonometriche inverse

Come abbiamo osservato in precedenza, le funzioni periodiche non sono in generale invertibili nel loro dominio di definizione; lo diventano se vengono ristrette a opportuni intervalli all'interno dei quali esse sono strettamente monotone. Presentiamo ora quindi le generalità delle funzioni trigonometriche inverse. I grafici vengono presentati in fondo al capitolo.

Osserviamo che $\sin x$ viene per convenzione ristretto all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dove è strettamente crescente; per il Teorema 2.8.3 il seno ristretto a questo intervallo è una funzione invertibile e la sua funzione inversa prende il nome di ARCOSENO e si indica con $\arcsin y$. Si osserva che il dominio della funzione seno ristretta diventa l'immagine della funzione arcoseno e viceversa. Questo è un fatto generale che accade anche per le altre funzioni trigonometriche inverse.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sin x \\ \text{Dominio: } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{Immagine: } [-1, 1] \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \arcsin y \\ \text{Dominio: } [-1, 1] \\ \text{Immagine: } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right.$$

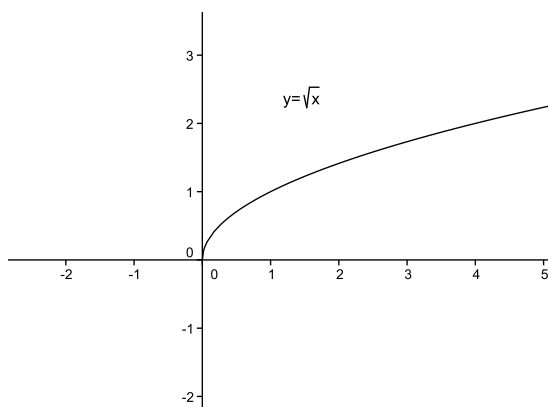
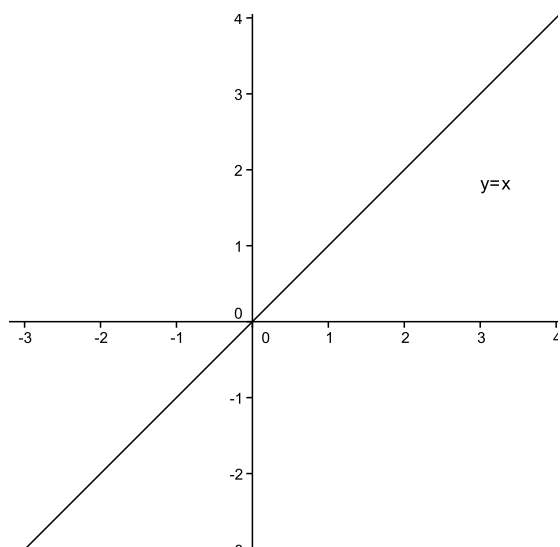
Invece $\cos x$ viene per convenzione ristretto all'intervallo $[0, \pi]$ dove è strettamente decrescente; per il Teorema 2.8.3 il coseno ristretto a questo intervallo è una funzione invertibile e la sua funzione inversa prende il nome di ARCOSENO e si indica con $\arccos y$. Si ha

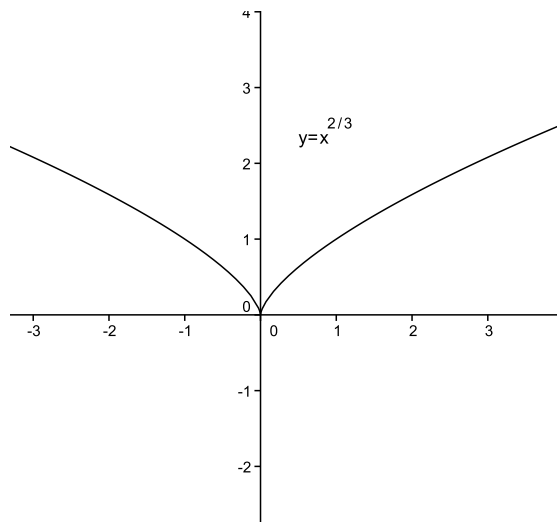
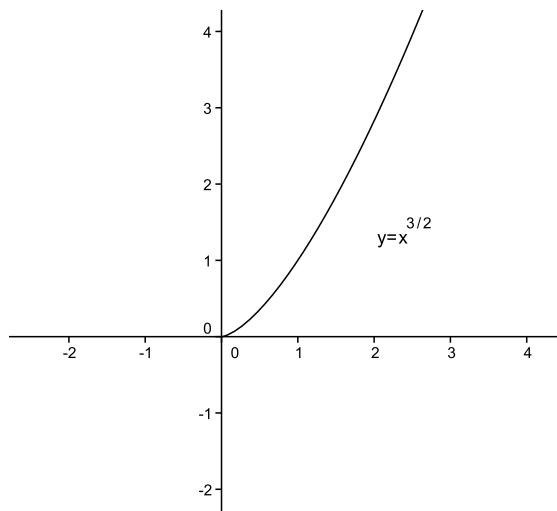
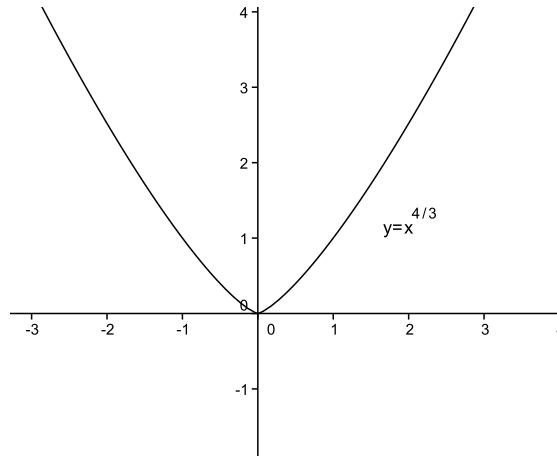
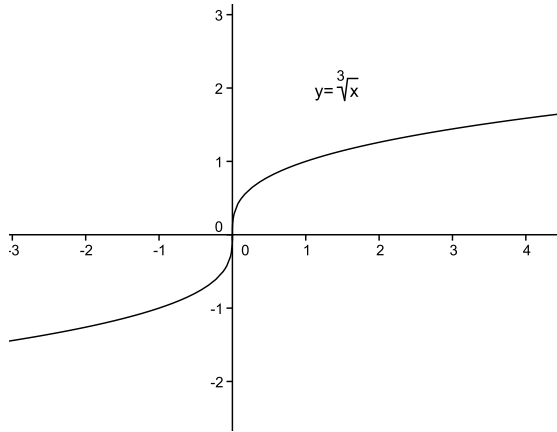
$$\begin{cases} y = \cos x \\ \text{Dominio: } [0, \pi] \\ \text{Immagine: } [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \arccos y \\ \text{Dominio: } [-1, 1] \\ \text{Immagine: } [0, \pi] \end{cases}$$

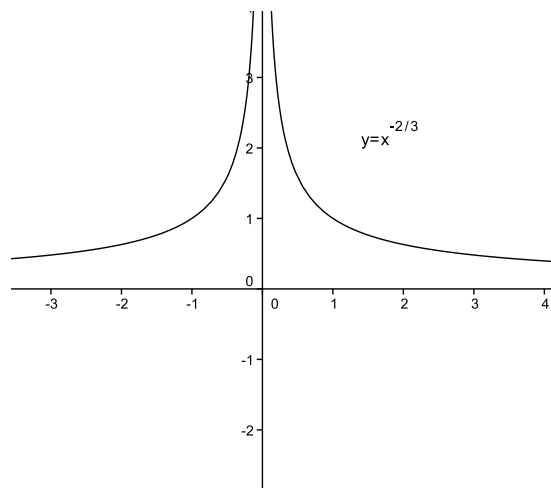
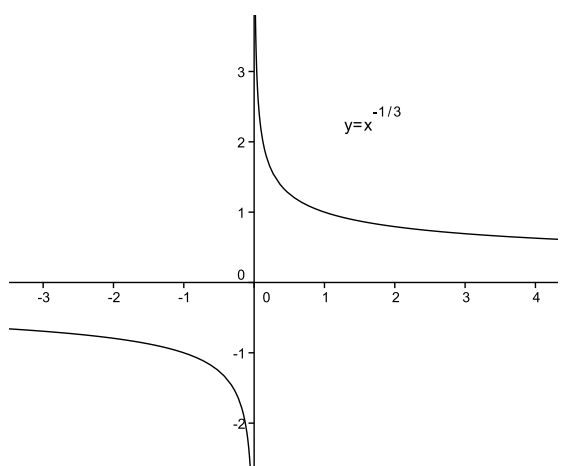
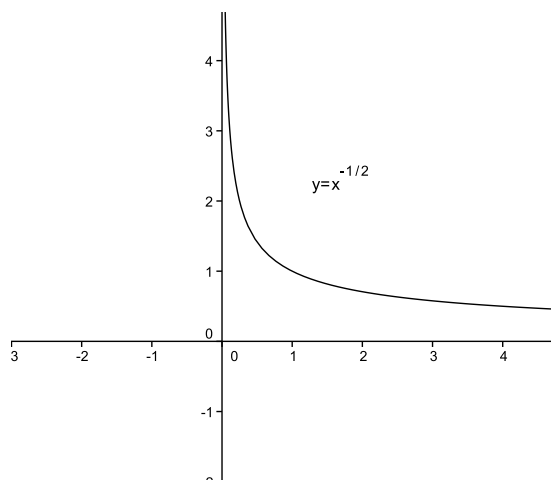
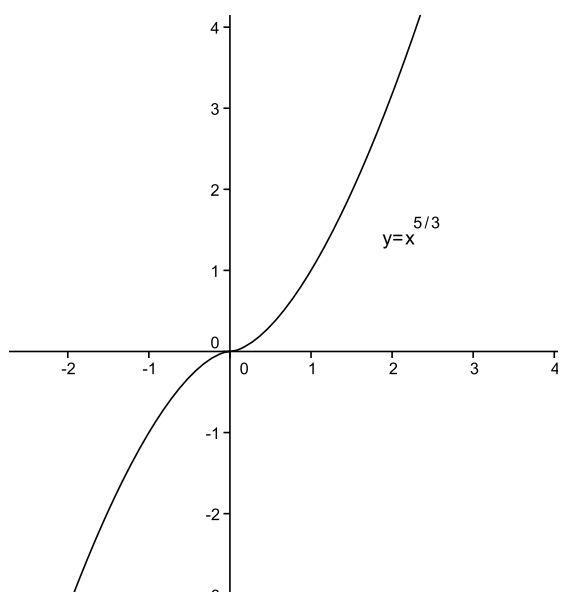
Infine $\tan x$ viene per convenzione ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (estremi esclusi!) dove è strettamente crescente; per il Teorema 2.8.3 la tangente ristretta a questo intervallo è una funzione invertibile e la sua funzione inversa prende il nome di ARCOTANGENTE e si indica con $\arctan y$. Si ha

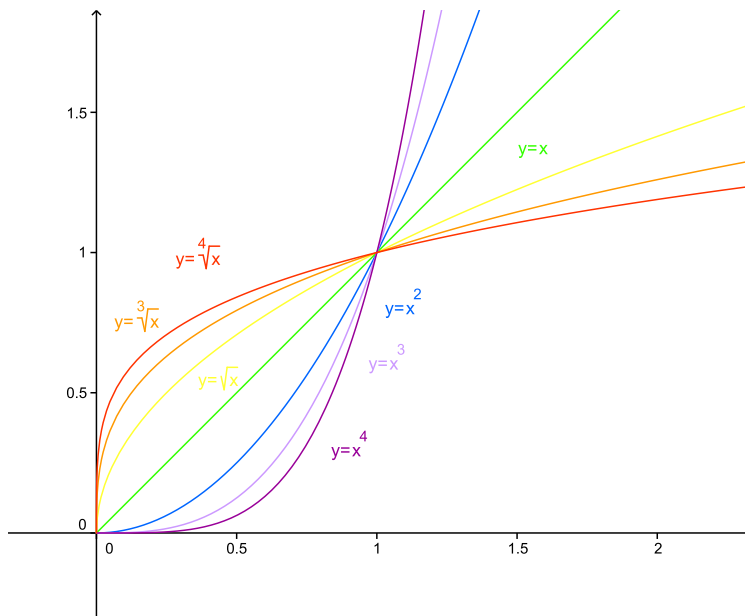
$$\begin{cases} y = \tan x \\ \text{Dominio: } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{Immagine: } \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \arctan y \\ \text{Dominio: } \mathbb{R} \\ \text{Immagine: } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

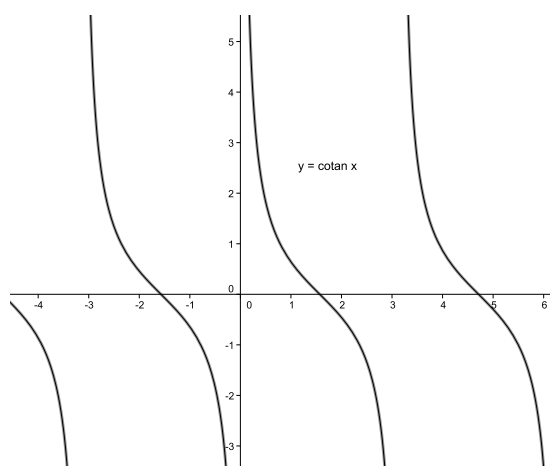
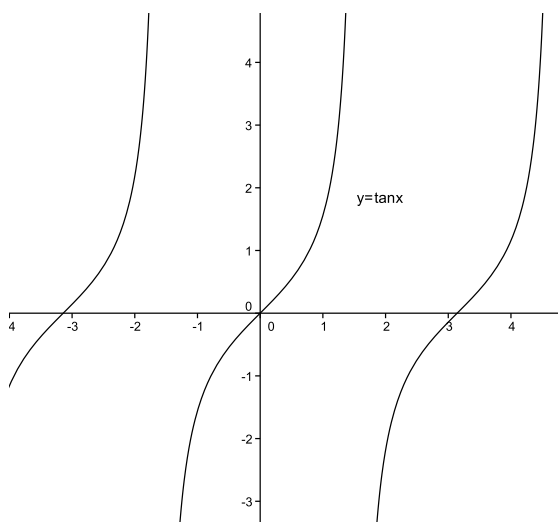
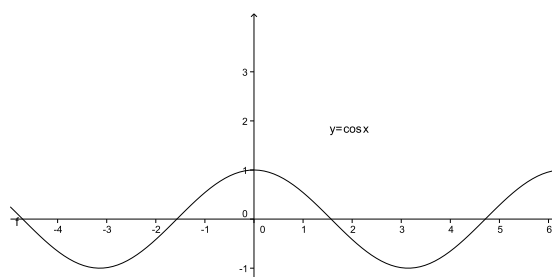
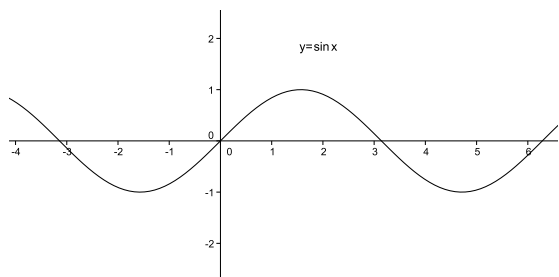
2.9. Alcuni grafici elementari

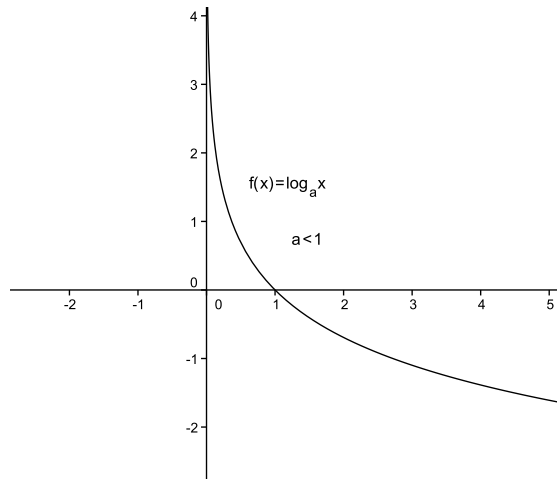
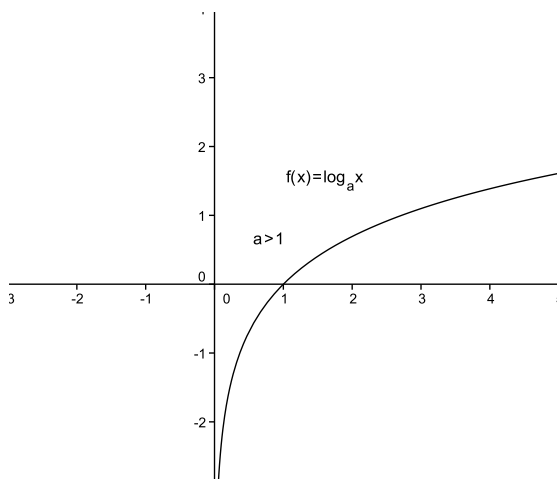
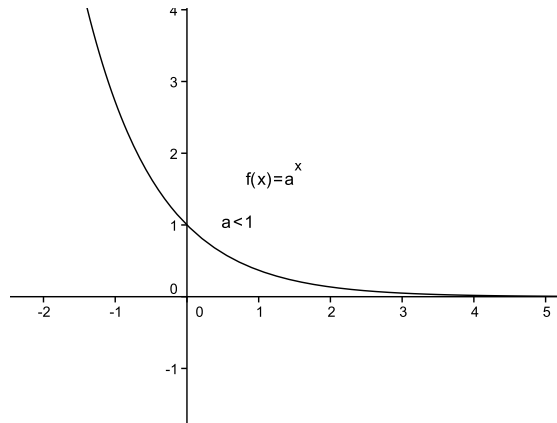
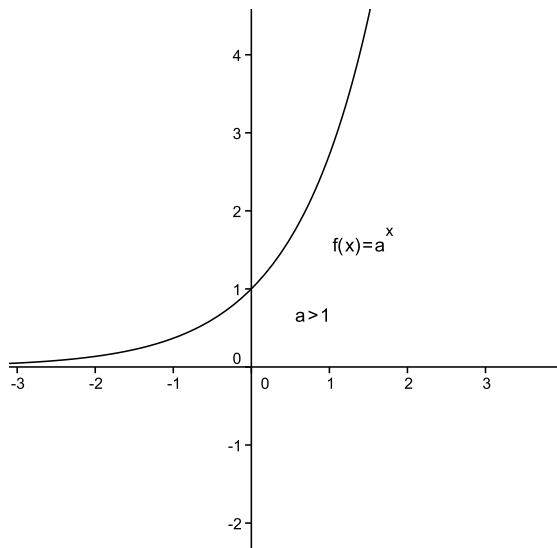


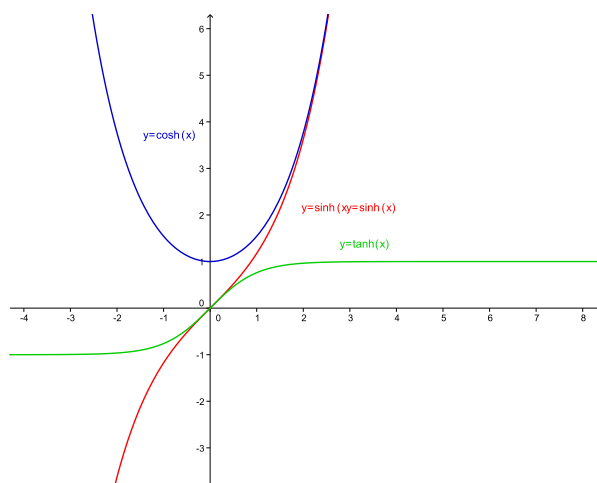
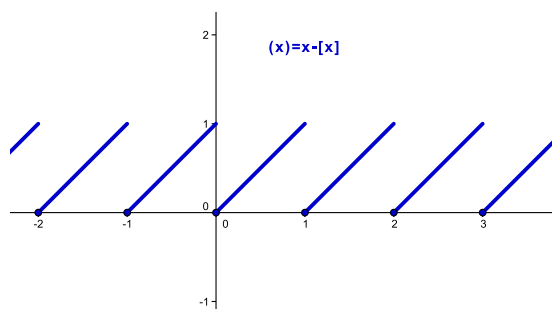
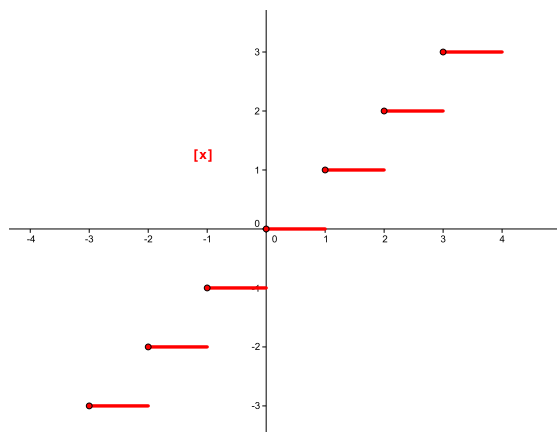


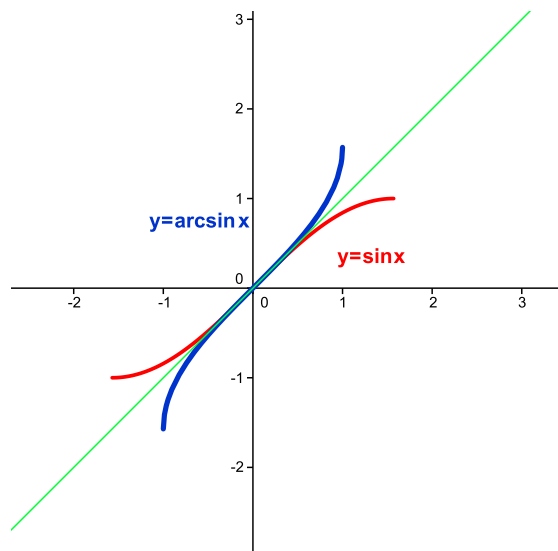
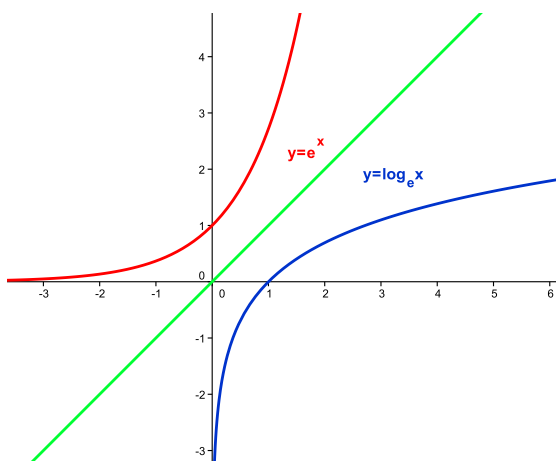
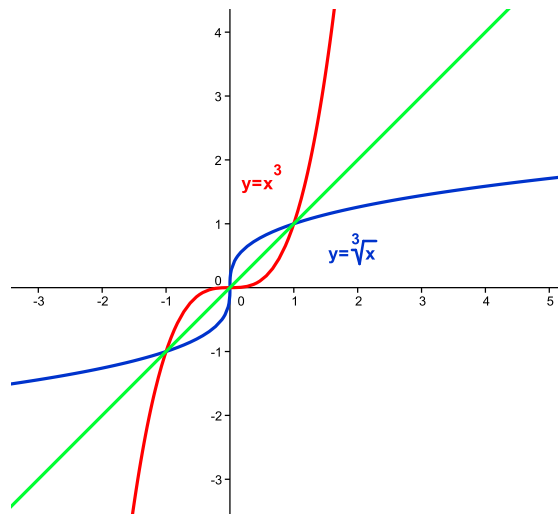
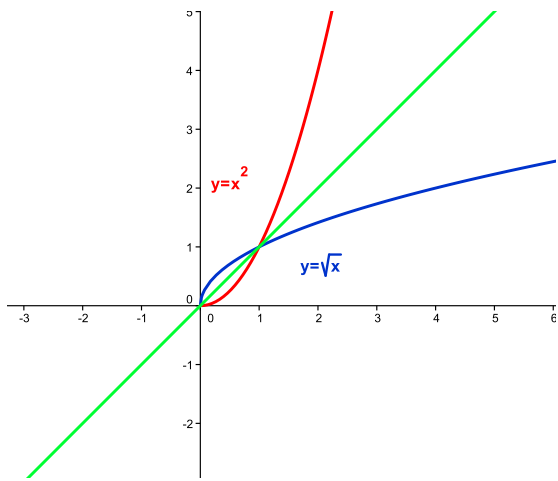


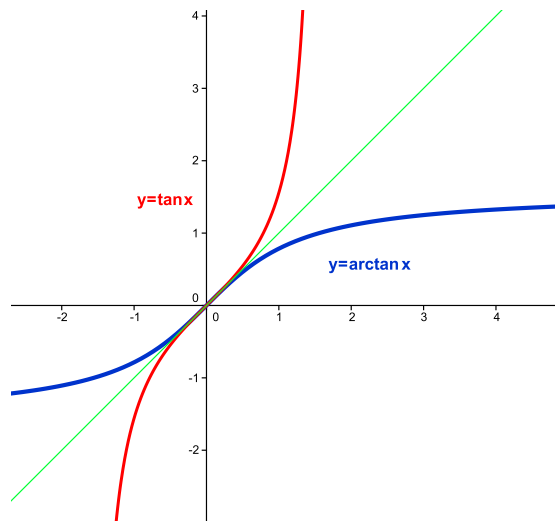
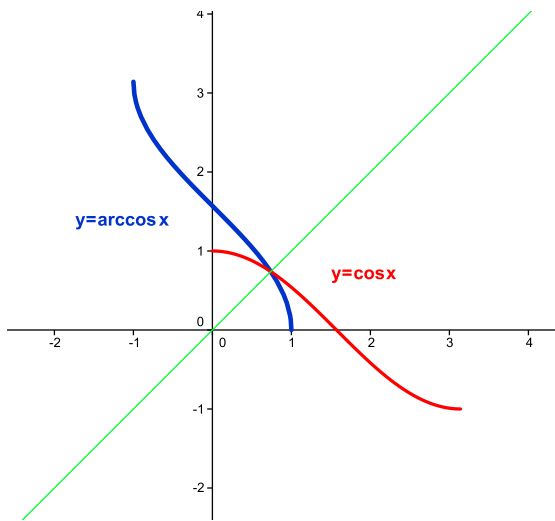












CAPITOLO 3

Successioni

3.1. Definizioni ed esempi

Nel Capitolo 6.12.1 abbiamo introdotto l'insieme numerico \mathbb{N} dei numeri naturali incluso lo zero, cioè:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n \dots\}.$$

In questo capitolo andiamo a studiare le funzioni definite sull'insieme dei numeri naturali (o un suo opportuno sottoinsieme che andremo a specificare), cioè oggetti del tipo


$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto f(n). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

È convenzione indicare con un simbolo diverso l'immagine di n tramite f , per esempio usando il simbolo a_n , che stia a sottolineare che l'output non è un insieme continuo di valori ma una successione di punti.


Una funzione del tipo (3.1.1) si dice **SUCCESSIONE**. Più precisamente si hanno le seguenti definizioni.

□ **Definizione 3.1.1.** Si dice **SEMIRETTA DI NUMERI NATURALI** un insieme del tipo $\{n \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n}\}$.

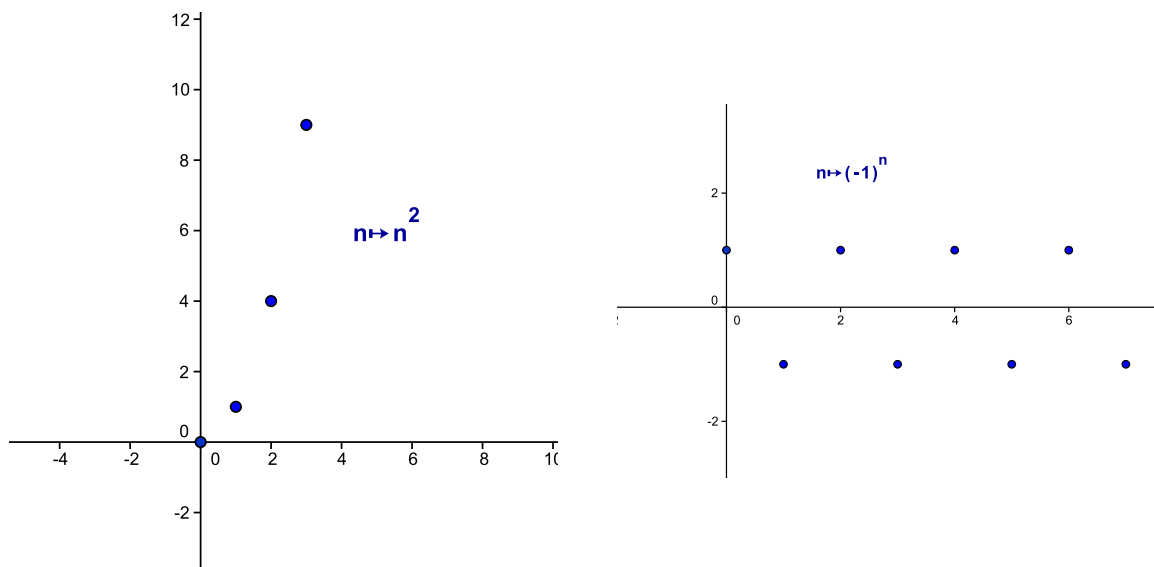
□ **Definizione 3.1.2.** Si dice **SUCCESSIONE** una qualunque applicazione definita su una semiretta di \mathbb{N} . Se il codominio dell'applicazione è un insieme A , si parla di successione di elementi di A (o successioni a valori in A).

 **Esempio 3.1.3.** Sono esempi di successioni le seguenti:

$n \mapsto n^2$	$0, 1, 4, 9, 16, \dots$	$n \geq 0$
$n \mapsto (-1)^n$	$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$	$n \geq 0$
$n \mapsto 4$	$4, 4, 4, 4, 4, 4, \dots$	$n \geq 0$
$n \mapsto \frac{n-1}{n+1}$	$-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots$	$n \geq 0$
$n \mapsto \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$	$n \geq 1$

 **Esempio 3.1.4.** Non è una successione la funzione $a_n := \frac{1}{1 + (-1)^n}$ perché è definita solo per n pari e questo insieme non contiene semirette di \mathbb{N} .

Graficamente si ha per esempio:



L'insieme dei valori di una successione (l'insieme delle immagini) si indica con il simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o più semplicemente $\{a_n\}$ quando è chiaro il dominio di partenza.

Si nota che per esempio $\{n^2\}$ è *limitata inferiormente ma non superiormente*, $\{(-1)^n\}$ è *limitata*, $\{(-2)^n\}$ *non è limitata*.

La domanda che ci si pone è la seguente: cosa succede per n grande?

☞ **Osservazione 3.1.5.** È chiaro che trattandosi di una successione, l'output è determinato da una serie di punti *isolati* cioè per ognuno di questi punti esiste un intervallo di lunghezza abbastanza piccola che contiene solo quel punto. Quindi ha poco senso domandarsi com'è il comportamento della successione vicino a tali punti; basta conoscere il valore della successione nel punto stesso. Invece ha senso domandarsi come si comporta la successione per n sufficientemente grande, cioè per n che tende all'infinito. Tra l'altro $+\infty$ è l'UNICO PUNTO DI ACCUMULAZIONE di \mathbb{N} cioè è l'unico punto (per altro non appartenente a \mathbb{N} tale per cui comunque prendo un intervallo illimitato a destra, contiene infiniti punti di \mathbb{N} . Quindi il resto del capitolo sarà dedicato a studiare il diverso comportamento delle successioni per $n \rightarrow +\infty$ (senza ambiguità di notazione scriveremo spesso ∞ intendendo $+\infty$).

3.2. Risultati preparatori

□ **Definizione 3.2.1.** Se $\mathcal{P}(n)$ è un predicato sui numeri naturali, si dice che \mathcal{P} è DEFINITIVAMENTE VERO se

$$\exists N : \forall n \geq N, \mathcal{P}(n).$$

SI DICE CHE \mathcal{P} È FREQUENTEMENTE VERO SE

$$\forall N, \exists n \geq N : \mathcal{P}(n).$$

☞ **Esempio 3.2.2.** È definitivamente vero che $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$. È frequentemente vero che $(-1)^n > 0$.

☞ **Osservazione 3.2.3.** Un predicato può essere contemporaneamente frequentemente vero e frequentemente falso. Esempio: è frequentemente vero che $(-1)^n > 0$ ma è anche frequentemente vero che $(-1)^n \leq 0$.

Quindi applicando questo concetto al caso delle successioni, diciamo che una successione $\{a_n\}$ possiede *definitivamente* una certa proprietà se $\exists N : \forall n \geq N$ a_n soddisfa quella proprietà, quindi se la possiede “da un certo punto in poi”.

☞ **Esempio 3.2.4.** La successione $n \mapsto \frac{n-1}{n+1}$ è definitivamente positiva. La successione $n \mapsto \frac{1}{n}$ è definitivamente minore di $\frac{1}{1000}$.

Il prossimo risultato dice che una successione definitivamente limitata è limitata.

Proposizione 3.2.5. Sia $\{a_n\}_n$ una successione; se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che definitivamente $a_n \leq M$ [$\geq M$] allora la successione $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente [*inferiormente*].

3.3. Successioni convergenti, divergenti, indeterminate

□ **Definizione 3.3.1.** Una successione $\{a_n\}_n$ si dice **CONVERGENTE** se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ con questa proprietà

$$\forall \varepsilon \text{ definitivamente } |a_n - \ell| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il numero ℓ si chiama **LIMITE DELLA SUCCESSIONE** e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow \ell \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Teorema 3.3.2. *Il limite di una successione, se esiste, è unico.*

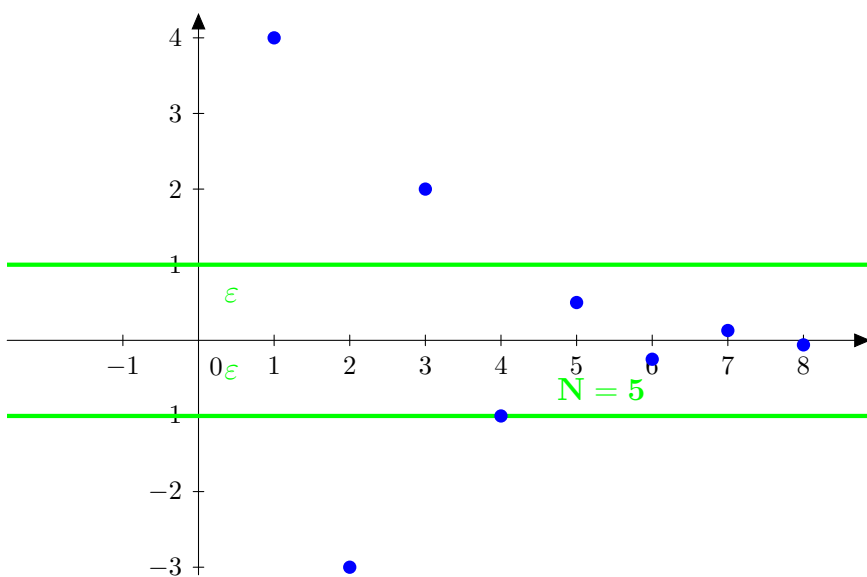
Dimostrazione. Se per assurdo esistessero due limiti di una successione, chiamiamoli ℓ_1 e ℓ_2 , si avrebbe

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

da cui $\ell_1 = \ell_2$ □


Graficamente: una successione tende a ℓ se fissata una striscia orizzontale centrata in ℓ e di semiampiezza ε (fissata una striscia orizzontale $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ “comunque stretta”), da un certo indice in poi i punti della successione non escono dalla striscia; infatti

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$



Conseguenza importante: *Ogni successione convergente è limitata.* (Intuitivamente: da un certo punto in poi, tutti i punti della successione stanno in una striscia, quindi la successione è definitivamente limitata; prima rimangono fuori solo un numero finito di punti, quindi si prende il massimo di questi in valore assoluto e questo costituisce il limite superiore (e con il segno contrario anche il limite inferiore)).

Vale il viceversa? No. Esistono infatti successioni limitate ma non convergenti. Controesempio: $a_n = (-1)^n$.

 **Esempio 3.3.3.** *Dimostrare che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

usando la definizione di limite.

Si deve far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \quad 1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon.$$

A questo punto:

$$\frac{n+1}{n-1} + \varepsilon - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{n+1 + \varepsilon(n-1) - n + 1}{n-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2 + \varepsilon(n-1)}{n-1} > 0$$

Ok se $n > 1$. Passiamo all'altra disuguaglianza:

$$\frac{n+1}{n-1} - \varepsilon - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{n+1 - \varepsilon(n-1) - n + 1}{n-1} < 0 \Leftrightarrow 2 - \varepsilon(n-1) < 0 \Leftrightarrow \varepsilon(n-1) > 2 \Leftrightarrow n > 1 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Quindi basta scegliere

$$N := \left[1 + \frac{2}{\varepsilon} \right] + 1,$$

dove il simbolo $[x]$ denota la parte intera del numero x , come introdotto nel primo capitolo.

\square **Definizione 3.3.4.** Una successione si dice DIVERGENTE A $+\infty$ se

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad a_n > M$$

Una successione si dice DIVERGENTE A $-\infty$ se

$$\forall \bar{M} < 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad a_n < \bar{M}$$

In tal caso $+\infty$ o $-\infty$ sono i limiti delle successioni divergenti e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

☞ **Osservazione 3.3.5.** Occorre notare che $\pm\infty$ sono simboli a cui non corrisponde nessun numero reale e quindi le operazioni che li coinvolgono devono essere fatte con cautela.

□ **Definizione 3.3.6.** Con il simbolo \mathbb{R}^* (o anche $\overline{\mathbb{R}}$) indichiamo l'insieme numerico dei REALI ESTESI cioè

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

☞ **Osservazione 3.3.7.** È facile mostrare che le precedenti definizioni tornano a essere valide anche se le disuguaglianze strette sono rimpiazzate da quelle larghe e viceversa. Infatti in tali casi basta scegliere in modo opportuno la quantità N .

□ **Definizione 3.3.8.** Una successione che ammette limite finito si dice CONVERGENTE. Esempio: $n \mapsto \frac{1}{n}$. Una successione che ammette limite infinito si dice DIVERGENTE. Esempio: $n \mapsto n^2$. Una successione che non ammette limite si dice IRREGOLARE O INDETERMINATA. Esempio: $n \mapsto (-1)^n$. Una successione che tende a zero si dice INFINITESIMA (quindi un "infinitesimo" non è un numero infinitamente piccolo ma una quantità variabile che diventa infinitamente piccola). Una successione divergente (positivamente o negativamente) si dice INFINITA.

Proposizione 3.3.9. Una successione $\{a_n\}_n$ è infinitesima se e solo se la successione dei suoi valori assoluti $\{|a_n|\}_n$ è infinitesima.

□ **Definizione 3.3.10.** Si dice che $a_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ PER ECCESSO [PER DIFETTO] e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} a_n = \ell^+ \quad [\ell^-] \text{ oppure } a_n \rightarrow \ell^+ \quad [\ell^-]$$

se

$$\forall \varepsilon, \text{ si ha che definitivamente } 0 \leq a_n - \ell < \varepsilon \quad [0 \leq \ell - a_n < \varepsilon]$$

☞ **Esempio 3.3.11.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1^- \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

dove nell'ultimo caso non si può affermare né che $a_n \rightarrow 0^+$ né che $a_n \rightarrow 0^-$.

Proposizione 3.3.12. Una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è CRESCENTE [DEBOLMENTE CRESCENTE] se e solo se

$$\forall n, \quad f(n) < f(n+1) \quad [\leq]$$

Analogamente, è DECRESCENTE [DEBOLMENTE DECRESCENTE] se e solo se

$$\forall n, \quad f(n) > f(n+1) \quad [\geq]$$

Proposizione 3.3.13. Se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è crescente, allora $\forall n, f(n) \geq n$.

DIMOSTRAZIONE. Per induzione.

□ **Definizione 3.3.14.** Si dice SOTTOSUCCESSIONE di una successione $\{a_n\}_n$ (o SUCCESSIONE ESTRATTA da $\{a_n\}_n$) la composizione $a \circ k$ della successione data con una qualunque applicazione crescente $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

☞ **Osservazione 3.3.15.** Poiché la composizione di due applicazioni crescenti è crescente, una sottosuccessione di una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$ è ancora una sottosuccessione di $\{a_n\}_n$. Inoltre ogni sottosuccessione di una successione monotona è monotona dello stesso tipo.

Teorema 3.3.16. *Se $a_n \rightarrow \ell$ allora per ogni sua estratta si ha $a_{n_k} \rightarrow \ell$. Il viceversa è banale, visto che $\{a_n\}_n$ è un'estratta di se stessa.*

Corollario 3.3.17. *Se una successione ha limite, tutte le estratte hanno lo stesso limite.*

Quindi $(-1)^n$ non ha limite.

Proposizione 3.3.18. *Se possiamo dividere una successione $\{a_n\}_n$ tra due successioni in modo che tutti gli elementi della successione appartengano a qualcuna di esse, e se entrambe hanno lo stesso limite ℓ , allora è tutta $\{a_n\}_n$ che ha limite ℓ .*

Quindi per dimostrare che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite basta trovare due successioni in modo tale che tutti gli elementi delle successioni appartengano a una delle due e tali che convergano a due limiti diversi. Quindi nel caso $a_n = (-1)^n$, basta considerare $a_{2k} \rightarrow 1$ e $a_{2k+1} \rightarrow -1$.

□ **Definizione 3.3.19.** Sulla base dei risultati precedenti, diremo che una successione $\{a_n\}$ è MONOTONA CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$; diremo che essa è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$; diremo che essa è MONOTONA DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$; diremo infine che essa è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$.

☞ **Esempio 3.3.20.** Quindi ad esempio $n \mapsto n^2$ è monotona strettamente crescente; $n \mapsto \frac{1}{n}$ è monotona strettamente decrescente; $n \mapsto (-1)^n$ non è monotona.

Teorema 3.3.21. *Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata. Allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Analogamente se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*

☞ **Osservazione 3.3.22.** Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità dei numeri reali e quindi vale se siamo in \mathbb{R} . Ad esempio, non è vero che una successione crescente e limitata di numeri razionali ammette sempre limite razionale.

Come conseguenza del teorema, si ha il seguente corollario:

Corollario 3.3.23. *Sia $\{a_n\}$ una successione monotona e crescente. Allora esiste*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente sia $\{a_n\}$ una successione monotona e decrescente. Allora esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esplicitamente: se $\{a_n\}$ è superiormente limitata allora converge a un numero reale; se è superiormente illimitata allora diverge. Quindi *una successione monotona converge o diverge; non può essere irregolare.*

📎 **Esempio 3.3.24.** *Consideriamo ad esempio la successione geometrica di ragione q :*

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$$

Allora se $q > 1$ è monotona crescente, illimitata superiormente, quindi diverge a $+\infty$; se $q = 1$ o $q = 0$ è costante. Se $0 < q < 1$ è monotona decrescente e quindi si dimostra che è infinitesima; se $q < 0$ invece non è monotona. Il comportamento si può riassumere come segue:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

3.4. Calcolo dei limiti e forme di indecisione

Teorema 3.4.1. (ALGEBRA DEI LIMITI) *Se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ allora*

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$$

$$a_n b_n \rightarrow a b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow a^b \quad (a, a_n > 0)$$

Teorema 3.4.2. (TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO (PRIMA FORMA)) *Se $a_n \rightarrow a$ e $a > 0$ [$a < 0$] allora definitivamente $a_n > 0$ [definitivamente $a_n < 0$]*

Teorema 3.4.3. (TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO (SECONDA FORMA)) *Se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ e $a_n \geq 0$ definitivamente allora $a \geq 0$. In generale: se $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ con $a_n \geq b_n$ definitivamente allora $a \geq b$.*

Teorema 3.4.4. (TEOREMA DEL CONFRONTO) *Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \rightarrow \ell$ e $c_n \rightarrow \ell$ allora $b_n \rightarrow \ell$*


Corollario 3.4.5. *Se $|b_n| \leq c_n$ definitivamente e $c_n \rightarrow 0$ allora $b_n \rightarrow 0$.*

Inoltre se $c_n \rightarrow 0$ e b_n è limitata (ma non necessariamente convergente!) allora $c_n b_n \rightarrow 0$.

Quest'ultimo risultato si può riassumere dicendo che *una successione infinitesima per una limitata è infinitesima.*

 **Esempio 3.4.6.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

 **Esempio 3.4.7.** *Si ha*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2} \left(1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n}\right)} = 0$$

dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2}}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n^{5/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{5/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$$

e quindi si può concludere visto che il prodotto di una successione limitata per una infinitesima è infinitesima.

 **Esempio 3.4.8.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n \frac{1}{n} = 0$$

di nuovo per il corollario precedente (la funzione seno è limitata).

Calcoli con $\pm\infty$


Come abbiamo osservato, i simboli $\pm\infty$ non appartengono ai numeri reali e quindi i calcoli che coinvolgono questi simboli devono essere fatti con cautela. È facile verificare che valgono le seguenti regole di aritmetizzazione (parziale) del simbolo di infinito (qui $a \in \mathbb{R}$):

$a + \infty = +\infty$	$a - \infty = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$a \cdot +\infty = +\infty (a > 0)$	$a \cdot (-\infty) = -\infty (a > 0)$	$a \cdot +\infty = -\infty (a < 0)$	$a \cdot (-\infty) = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{0^+} = +\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^-} = -\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^+} = -\infty (a < 0)$	$\frac{a}{0^-} = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{+\infty} = 0^+ (a \geq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^- (a \geq 0)$	$\frac{a}{+\infty} = 0^- (a \leq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^+ (a \leq 0)$

Mancano regole per trattare i seguenti casi:

$$\boxed{+\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^{\pm\infty} \quad 0^0 \quad (+\infty)^0}$$

Questi casi prendono il nome di **FORME DI INDECISIONE**. Si chiamano così non perché non si sappia come trattarle ma perché a priori il risultato può venire diverso a seconda delle successioni considerate e quindi non hanno un comportamento simile in modo tale da poterle unificare in una sola regola. Il seguente esempio chiarirà questo concetto.

 **Esempio 3.4.9.** Consideriamo i seguenti limiti

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2$
- 3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

In tutti e 3 i casi si tratta della stessa forma di indecisione $[+\infty - \infty]$. Mostriamo che invece il risultato è diverso nei tre casi. Questo significa avere a che fare con una forma di indecisione: che il risultato del limite può essere diverso a seconda del caso considerato. Si ha infatti

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

mentre

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\infty$$

e infine

$$\begin{aligned} 3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0 \end{aligned}$$

Teorema 3.4.10. (IL NUMERO DI NEPERO) *La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è convergente (osserviamo che si tratta di una forma di indecisione 1^∞)*

□ **Definizione 3.4.11.** Il limite della precedente successione si chiama NUMERO DI NEPERO e si indica con e

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Teorema 3.4.12. *Sia $\{a_n\}$ una qualsiasi successione divergente ($a + \infty$ o $a - \infty$). Allora esiste*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

3.5. Confronti e stime asintotiche

Quando due successioni sono entrambe infinite o infinitesime diventa utile confrontarle per vedere quale delle due tende “più rapidamente” a 0 o a $+\infty$.

Siano dunque $a_n \rightarrow \infty$ e $b_n \rightarrow \infty$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \{a_n\} \text{ è un infinito di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \{a_n\} \text{ è un infinito dello stesso ordine rispetto a } \{b_n\} \\ \pm\infty & \{a_n\} \text{ è un infinito di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \# & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Sia ora $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \pm\infty & \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } \{b_n\} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \{a_n\} \text{ è un infinitesimo dello stesso ordine rispetto a } \{b_n\} \\ 0 & \{a_n\} \text{ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \{b_n\} \\ \# & \{a_n\} \text{ e } \{b_n\} \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

□ **Definizione 3.5.1.** Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

allora diremo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE e scriveremo $a_n \sim b_n$

Proposizione 3.5.2. *Si hanno i seguenti fatti:*

1) Se $a_n \sim b_n$, le due successioni hanno lo stesso comportamento, quindi o entrambe convergono allo stesso limite o entrambe divergono a $\pm\infty$ o entrambe non hanno limite;

2) se $a_n \sim b_n \sim \dots \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$;

3) un'espressione fatta da un prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore: quindi

$$a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n, c_n \sim c'_n \Rightarrow \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

☞ **Osservazione 3.5.3.** Osserviamo che: a) il punto 3) della proposizione precedente non vale nel caso di somme o esponenziali di successioni, ma solo nel caso di prodotti e quozienti;

b) un tipico modo di mostrare che $a_n \sim b_n$ è dire che $a_n = b_n c_n$ con $c_n \rightarrow 1$; esempio:

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \sim 2n^2$$

perché

$$1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2n^2} \rightarrow 1$$

c) la relazione \sim di "asintotico" è una relazione di equivalenza: infatti è riflessiva $a_n \sim a_n$; simmetrica $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$ e anche transitiva dal punto 2) della proposizione precedente.

Teorema 3.5.4. (CRITERIO DEL RAPPORTO) *Sia a_n una successione positiva ($a_n > 0 \forall n$). Se esiste*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

allora:

- 1) se $\ell < 1$ allora $a_n \rightarrow 0$
- 2) se $\ell > 1$ (anche $\ell = +\infty$) allora $a_n \rightarrow +\infty$
- 3) se $\ell = 1$ allora nulla si può dire a priori

Teorema 3.5.5. (GERARCHIA DEGLI INFINITI) *Si può dimostrare che vale la seguente gerarchia degli infiniti:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad \forall a > 1, \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

☞ **Osservazione 3.5.6.** Si noti che in tutti questi casi si parte da forme di indecisione $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Gli ultimi due punti del teorema precedente possono essere dimostrati con il criterio del rapporto. Infatti sia $a_n = \frac{b^n}{n!}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \rightarrow 0 < 1 \text{ definitivamente}$$

da cui la tesi. E d'altra parte sia $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \text{ definitivamente}$$

da cui la tesi.

☞ **Osservazione 3.5.7.** Il criterio del rapporto fallisce ad esempio nei casi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$$

perché in entrambi i casi il rapporto tra un termine della successione e il suo successivo tende a 1; in questo caso dunque osservando gli esempi precedenti si vede che nulla si può dire a priori perché il comportamento delle successioni è differente caso per caso.

☞ **Osservazione 3.5.8.** Un modo per risolvere forme di indecisione del tipo $[\infty^0]$ è usare l'identità $a^{\log_a x} = x$. Infatti ad esempio

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = 1$$

dove abbiamo utilizzato la gerarchia degli infiniti.

CAPITOLO 4

Limiti di funzioni reali di variabile reale

4.1. Definizione e prime proprietà

L'operazione di limite studiata nel capitolo precedente per le successioni può essere estesa al caso di funzioni reali di una variabile reale.

Sia I intervallo e sia $c \in I$, con $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tranne al più il punto c ; l'intervallo I può essere limitato o illimitato, aperto o chiuso e c può anche eventualmente essere $\pm\infty$.

Consideriamo una successione $x_n \in I$ con $x_n \neq c$ e $x_n \rightarrow c$ per $n \rightarrow \infty$; poi consideriamo la successione delle immagini $f(x_n)$.

□ **Definizione 4.1.1.** (DEFINIZIONE SUCESSIONALE DI LIMITE) Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \quad c, \ell \in \mathbb{R}^*$$

se

$$\forall \{x_n\}_n \neq c, x_n \rightarrow c \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

□ **Definizione 4.1.2.** Si dice INTORNO di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ un intervallo aperto che contiene x_0 , cioè è un intervallo del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per qualche $\delta > 0$. Un intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$; un intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo $(-\infty, b)$.

□ **Definizione 4.1.3.** Diciamo che una funzione $f(x)$ possiede una certa proprietà DEFINITIVAMENTE per $x \rightarrow c$ se esiste un intorno U di c tale che la proprietà vale per $f(x)$ per ogni $x \in U$, $x \neq c$.

□ **Definizione 4.1.4.** (DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE) Sia $c \in \mathbb{R}^*$ e sia f una funzione definita almeno definitivamente per $x \rightarrow c$. Si dice che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell \quad \ell \in \mathbb{R}^*$$

se

$$\forall U_\ell \text{ intorno di } \ell \exists V_c \text{ intorno di } c \text{ tale che } \forall x \in V_c, x \neq c, f(x) \in U_\ell.$$

Distinguiamo ora quattro casi in cui alternativamente c e ℓ sono finiti o infiniti e andiamo a caratterizzare le corrispondenti proprietà.

4.1.1. Limite finito all'infinito

In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

si scrive nel dettaglio:

se $c = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

se $c = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall x, x < -K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

In questo caso si dice che f ha un ASINTOTO ORIZZONTALE cioè una retta di equazione $y = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ tale che per $x \rightarrow +\infty$ oppure per $x \rightarrow -\infty$ si abbia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{rispettivamente} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Quindi ogni situazione di limite finito all'infinito corrisponde graficamente a un asintoto orizzontale.

□ Definizione 4.1.5. Se $\ell \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^*$ si dice che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell^+ \quad (\text{rispettivamente } \ell^-)$$

se $\forall \{x_n\} \subset I$ con $x_n \neq c$ con $x_n \rightarrow c$ si ha che $f(x_n) \rightarrow \ell^+$ (rispettivamente ℓ^-) per $n \rightarrow \infty$ ($\Leftrightarrow f(x_n) \geq \ell$ definitivamente (rispettivamente $f(x_n) \leq \ell$ definitivamente)).

Si noti che non ogni limite finito è necessariamente assunto per eccesso o difetto. Controesempio: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

4.1.2. Limite infinito all'infinito

In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

si scrive nel dettaglio:

se $c = +\infty$ e $\ell = +\infty$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 : \forall x, x > K \Rightarrow f(x) > H;$$

se $c = +\infty$ e $\ell = -\infty$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 : \forall x, x > K \Rightarrow f(x) < -H;$$

se $c = -\infty$ e $\ell = +\infty$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 : \forall x, x < -K \Rightarrow f(x) > H;$$

se $c = -\infty$ e $\ell = -\infty$

$$\forall H > 0 \exists K > 0 : \forall x, x < -K \Rightarrow f(x) < -H.$$

Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x + x^2 = +\infty.$$

Nei casi in cui una funzione presenta limite infinito all'infinito può accadere (ma non è detto!) che esista una retta obliqua a cui la funzione si avvicina indefinitamente. Tale retta si chiama ASINTOTO OBLIQUO. Precisamente:

□ **Definizione 4.1.6.** Si dice che una funzione $f(x)$ ha ASINTOTO OBLIQUO $y = mx + q$ (con $m \neq 0, q \in \mathbb{R}$) per $x \rightarrow +\infty$ (oppure $x \rightarrow -\infty$) se accade che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \quad \text{oppure rispettivamente} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx - q] = 0.$$

Vale la seguente:

Proposizione 4.1.7. La funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1) esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$

2) esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = q.$$

In tale caso l'asintoto è esattamente $y = mx + q$. Analogo criterio può essere enunciato nel caso $x \rightarrow -\infty$.

✎ **Esempio 4.1.8.** La funzione $f(x) = e^x + 2x + 1$ ammette come asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ la retta $y = 2x + 1$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{e^x + 1}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1.$$

✎ **Esempio 4.1.9.** La funzione $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ non ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$. Infatti è ben vero che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{\sqrt{x}}{x} = 3$$

ma poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

4.1.3. Limite infinito al finito

In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

si scrive nel dettaglio:

se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$

$$\forall K > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -K.$$


Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

In questo caso il limite $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$ esiste solo se esistono e sono entrambi uguali a ℓ i limiti destro e sinistro, cioè rispettivamente

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \ell \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \ell.$$

Tuttavia può accadere che i limiti destro e sinistro esistano e siano diversi tra loro oppure che uno solo dei due limiti esista. In tal caso si dice che il limite dato non esiste.

 **Esempio 4.1.10.** Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste.}$$

Infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

In questi casi accade che f abbia un ASINTOTO VERTICALE.


Definizione 4.1.11. Si dice che f ha un ASINTOTO VERTICALE di equazione $x = c$ (con $c \in \mathbb{R}$) per $x \rightarrow c$ (oppure per $x \rightarrow c^+$ o $x \rightarrow c^-$) se accade che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

o rispettivamente a seconda dei casi

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$$

 **Esempio 4.1.12.** $x = 0$ è asintoto verticale ad esempio per le funzioni $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$, $h(x) = \log x$.

4.1.4. Limite finito al finito

In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$$

si scrive nel dettaglio

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Come si dimostra ad esempio questo limite? Usando ad esempio la definizione successionale di limite, stimando $|\sin x_n| \leq |x_n|$ e usando poi il teorema del confronto. In generale infatti non è corretto valutare il limite finito di una funzione al finito semplicemente inserendo dentro la funzione il valore del punto di limite. Considerando infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

allora è facile dimostrare con la definizione che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

perché per ogni successione di punti diversi da 0, la funzione calcolata nei valori della successione vale sempre costantemente 1. D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Invece nel caso dell'esempio precedente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0.$$

Quindi una sembra essere una situazione "normale" mentre l'altra è patologica. Semplicemente la funzione seno ha una proprietà che l'altra funzione non ha: *la continuità*.

□ Definizione 4.1.13. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo e sia $c \in I$. Allora si dice che f è **CONTINUA** in c se esiste


$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I . Una funzione non continua in un punto c si dice **DISCONTINUA**.

□ Definizione 4.1.14. Si dice che c è un **PUNTO DI DISCONTINUITÀ A SALTO** per $f(x)$ quando i limiti destro e sinistro esistono finiti ma diversi tra loro. In questo caso si definisce

$$\text{salto in } c = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x).$$

Se uno dei due limiti destro o sinistro coincide per $x \rightarrow c$ con $f(c)$ si dice che f è **CONTINUA DA DESTRA** O **DA SINISTRA** rispettivamente.

 **Esempio 4.1.15.** La funzione $f(x) = x/|x| = |x|/x$ presenta una discontinuità a salto per $x = 0$, visto che

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x}{|x|} = \pm 1$$

e il salto in 0 vale 2.

Le funzioni con discontinuità a salto modellizzano molto bene bruschi cambiamenti.

Naturalmente in generale in ognuno dei 4 casi presentati, il limite può anche non esistere, anche nel caso di funzioni continue o limitate. Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

(per dimostrarlo basta usare la definizione successionale di limite e trovare due successioni di punti, per esempio $x_n = n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ dove la funzione ha limiti diversi).

4.2. Calcolo dei limiti

Essendo poco agevole in generale calcolare limiti con la definizione, topologica o successionale, dobbiamo ricorrere a opportuni teoremi che combinati tra loro possano dare le regole di calcolo per affrontare limiti di funzioni di una variabile reale. Usando la definizione successionale di limite, molti di questi risultati li possiamo far discendere direttamente dai corrispondenti risultati per limiti di successioni.

Useremo proprietà vere definitivamente per $x \rightarrow c$ e salvo avviso contrario considereremo $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 4.2.1. (TEOREMA DEL CONFRONTO) *Se per $x \rightarrow c$, $f(x) \rightarrow \ell$, $g(x) \rightarrow \ell$ e si ha*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow c$$

allora anche $h(x) \rightarrow \ell$ per $x \rightarrow c$.

Corollario 4.2.2. *Se per $x \rightarrow c$ si ha $g(x) \rightarrow 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \rightarrow c$, allora anche $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$.*

Il precedente risultato si riassume dicendo che il prodotto di una successione limitata per una infinitesima è infinitesima.

Corollario 4.2.3. *Se $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$ e $g(x)$ limitata definitivamente per $x \rightarrow c$ allora $f(x)g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow c$.*

Teorema 4.2.4. (TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO - I FORMA) *Se per $x \rightarrow c$, $f(x) \rightarrow \ell > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$.*

Teorema 4.2.5. (TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO - II FORMA) *Se per $x \rightarrow c$, $f(x) \rightarrow \ell$ e $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$ allora $\ell \geq 0$.*

Teorema 4.2.6. (TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO PER FUNZIONI CONTINUE) *Se f è continua in c e $f(c) > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow c$.*

Teorema 4.2.7. (ALGEBRA DEI LIMITI - CASO DEI LIMITI FINITI) *Se per $x \rightarrow c$ $f(x) \rightarrow \ell_1$ e $g(x) \rightarrow \ell_2$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ allora per $x \rightarrow c$ si ha*

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &\rightarrow \ell_1 \pm \ell_2 \\ f(x) g(x) &\rightarrow \ell_1 \ell_2 \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (\text{purché } \ell_2 \neq 0 \text{ e } g(x) \neq 0 \text{ definitivamente}) \end{aligned}$$

Teorema 4.2.8. (ARITMETIZZAZIONE PARZIALE DEL SIMBOLO DI ∞) *Valgono le stesse regole esposte per le successioni, con particolare riferimento alle forme di indecisione.*

Teorema 4.2.9. (ALGEBRA DELLE FUNZIONI CONTINUE) *Siano f e g due funzioni due funzioni definite almeno in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e continue in x_0 . Allora:*

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &\text{ è continua in } x_0 \\ f(x) g(x) &\text{ è continua in } x_0 \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\text{ è continua in } x_0 (\text{purché } g(x_0) \neq 0) \end{aligned}$$

Teorema 4.2.10. (DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI) *Le seguenti funzioni elementari sono continue in tutti i punti del proprio insieme di definizione:*

- 1) potenze a esponente intero, razionale o reale
- 2) funzioni esponenziali
- 3) funzioni logaritmiche
- 4) funzioni trigonometriche elementari ($\sin x, \cos x, \dots$)

☞ **Osservazione 4.2.11.** 1) Combinando opportunamente tra loro in molti modi questi “componenti elementari” si ottengono naturalmente altre funzioni continue. In particolare combinando i precedenti risultati si ottiene che sono funzioni continue nel loro insieme di definizione i polinomi, le funzioni razionali, la funzione tangente, la funzione cotangente ecc...

2) L'importanza delle funzioni continue è la seguente: se si sa a priori che una funzione è continua

allora il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ si può calcolare semplicemente calcolando il valore $f(x_0)$

3) un'altra operazione che conserva i limiti è la composizione di funzioni, come mostrano i prossimi risultati

Teorema 4.2.12. (CAMBIO DI VARIABILE NEL LIMITE) *Siano f e g due funzioni per cui è ben definita la funzione $f \circ g$, almeno definitivamente per $x \rightarrow x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}^*$) e supponiamo che:*

(i) $g(x) \rightarrow t_0$ per $x \rightarrow x_0$

(ii) esiste $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*$

(iii) $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

I punti $x_0, t_0 \in \mathbb{R}^*$. L'ipotesi (ii) non è necessaria nel caso in cui f sia continua in t_0 oppure ovviamente nel caso in cui $t_0 = \pm\infty$.

Teorema 4.2.13. (DI CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE COMPOSTA) *Sia g una funzione definita almeno in un intorno di x_0 e continua in x_0 ; sia f una funzione definita almeno in un intorno di $t_0 = f(x_0)$ e continua in t_0 . Allora la funzione composta $f \circ g$ è definita almeno in un intorno di x_0 ed è continua in x_0 (ricordiamo che un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo aperto che contiene x_0).*

Quindi come conclusione di questi risultati si ha che le funzioni elementari dell'Analisi Matematica sono continue nel loro insieme di definizione. Quindi per esempio le funzioni

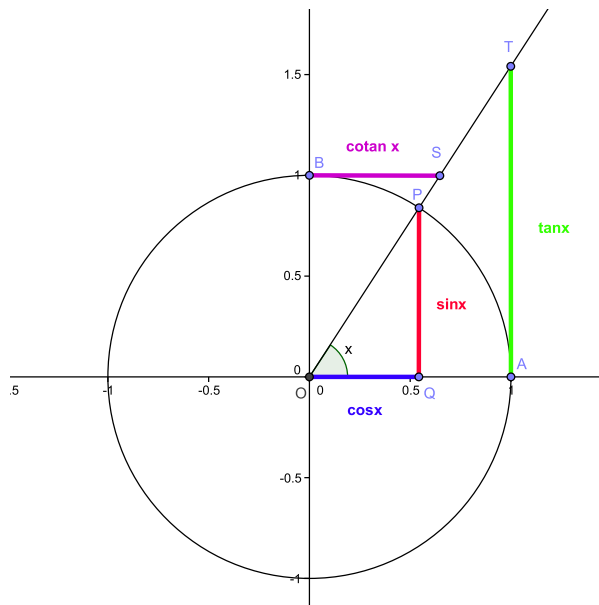
$$e^{-x^2} \quad \sqrt{\sin x} \quad \log_2(1 + (\tan x)^2)$$

sono funzioni continue dove sono definite, e dunque si ha ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{-x^2} = e^{-1} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\pi} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1 + (\tan x)^2) = 0.$$

4.2.1. Limiti notevoli

Ricordiamo che le quantità seno, coseno e tangente di un angolo sono state definite attraverso la costruzione geometrica usando la circonferenza goniometrica.



Dimostriamo ora alcuni limiti che hanno a che fare con le funzioni trigonometriche. Per la loro importanza questi ed altri limiti che coinvolgono funzioni esponenziali e logaritmiche vengono chiamati LIMITI NOTEVOLI.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari perché quoziente di funzioni dispari; quindi è sufficiente studiare il limite dato per $x \rightarrow 0^+$; inoltre siccome stiamo lavorando in un intorno destro di zero, non è restrittivo supporre che $x \in (0, \pi/2)$ dove la funzione $\sin x > 0$. Osserviamo dunque la figura. Da fatti geometrici si ha evidentemente che l'area del triangolo OPA è (strettamente!) minore dell'area del settore circolare OPA che a sua volta è strettamente minore dell'area del triangolo OTA.

A questo punto, l'area del triangolo OPA si calcola base (che è il segmento OA che vale 1 essendo raggio della circonferenza goniometrica) per altezza che è PQ e che per definizione vale $\sin x$ diviso per due.

L'area del settore circolare è in proporzione con l'area del cerchio che vale π (sarebbe moltiplicato per il raggio al quadrato ma vale 1): quindi siccome l'angolo sotteso all'area del cerchio è 2π (angolo giro) in proporzione l'area del settore sarà $x/2$.

Infine l'area del triangolo OTA si calcola di nuovo base (che è di nuovo OA e quindi 1) per altezza che stavolta è AT che per definizione è $\tan x$ diviso due.

Quindi riassumendo si hanno le seguenti disuguaglianze strette:

$$\sin x < x < \tan x.$$

Dividendo per $\sin x$ (posso farlo perché ho supposto di lavorare in un intervallo in cui $\sin x > 0$) si ottiene

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ma $\cos x$ è una funzione continua, che in zero vale 1. Passando al limite nella precedente disuguaglianza e utilizzando il teorema del confronto si deduce il limite notevole richiesto.

☞ **Osservazione 4.2.14.** (PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE) In generale se una funzione $f(x)$ non è definita in x_0 ma esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

allora la funzione può essere *prolungata con continuità* ponendo $f(x_0) = \ell$; più precisamente la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

diventa definita anche in x_0 e continua in tutto il dominio. Quindi per esempio la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ che inizialmente non è definita in $x = 0$, dal limite notevole appena dimostrato si può prolungare con continuità anche in $x = 0$ ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

I seguenti limiti notevoli sono tutti una diretta conseguenza del limite notevole appena dimostrato, che viene usato sistematicamente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Questo limite si dimostra utilizzando il precedente. Infatti si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}.\end{aligned}$$

A questo punto $\cos x \rightarrow 1$ e quindi il risultato si ottiene usando la continuità della funzione coseno e il limite notevole precedente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Si ha banalmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1$$

dalla continuità del coseno.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Operando un cambio di variabile si pone $t = \arcsin x$ da cui $x = \sin t$ e $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$, da cui in maniera immediata

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

In maniera analoga si dimostra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Passiamo ora a un'altra categoria di limiti notevoli, che coinvolgono funzioni esponenziali e logaritmiche. Abbiamo visto che il numero di Nepero può essere definito come limite di una opportuna successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Usando la definizione successionale di limite non è difficile vedere che lo stesso limite si “trasporta” nel caso delle funzioni, da cui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Come conseguenza diretta di questo limite abbiamo i seguenti due limiti notevoli

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

che si dimostra a partire dal precedente prima passando ai logaritmi da cui

$$\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

e poi concludendo con un cambio di variabile $1/x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

che si deduce dal precedente con un cambio di variabile $y = e^x - 1$.

4.3. Confronti e stime asintotiche

□ **Definizione 4.3.1.** Si dice che due funzioni sono ASINTOTICHE per $x \rightarrow c$ se

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1;$$

in tal caso si scrive $f \sim g$

Dai precedenti limiti notevoli si deduce immediatamente che per $x \rightarrow 0$

$$\sin x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad e^x - 1 \sim x \quad \log(1+x) \sim x$$

È importante notare che la relazione di essere asintotico (che è una relazione di equivalenza e vale solo per prodotti, quozienti e potenze di funzioni, non per somme e differenze!) dipende fortemente dal punto dove stiamo facendo il limite. Infatti si noti la differenza

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

il primo è un limite notevole, il secondo si dimostra con il teorema del confronto (è il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima). In particolare

$$\sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$$

ma

$$\text{NON È VERO CHE } \sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

Più in generale, se $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ è una funzione infinitesima, le precedenti relazioni si possono estendere ai seguenti casi (validi per $\varepsilon(x) \rightarrow 0$)

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x) \quad 1 - \cos \varepsilon(x) \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2} \quad e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x) \quad \log(1 + \varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$

 **Esempio 4.3.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

perché per $x \rightarrow 0$

$$\log(1 + 3x) \sim 3x \quad \sin 2x \sim 2x$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

Teorema 4.3.3. (GERARCHIA DEGLI INFINITI) *Si possono dimostrare i seguenti limiti (si noti che sono tutte forme di indecisione) validi per $\alpha, \beta > 0$, $a, b > 1$, γ qualunque*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^\beta (-\log y)^\gamma = 0$$

4.4. Esercizi proposti

✎ **Esercizio 4.4.1.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$$

Si ha, per $x \rightarrow 0$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2 \quad 1 - \cos(2x) \sim (2x)^2/2 \quad \sin x \sim x$$

da cui

$$\frac{(e^{x^2} - 1) \sin x}{x(1 - \cos 2x)} \sim \frac{x^2 x}{x 2x^2}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin x}{x(1 - \cos 2x)} = \frac{1}{2}$$

✎ **Esercizio 4.4.2.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{2x^5} - 1}}{\log(1 - x^2 \sqrt{x})}$$

Si ha, per $x \rightarrow 0$

$$e^{2x^5} - 1 \sim 2x^5 \quad \log(1 - x^2 \sqrt{x}) \sim -x^2 \sqrt{x} = -x^{5/2}$$

da cui

$$\frac{\sqrt{e^{2x^5} - 1}}{\log(1 - x^2 \sqrt{x})} \sim \frac{\sqrt{2}x^{5/2}}{-x^2 \sqrt{x}}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{2x^5} - 1}}{\log(1 - x^2 \sqrt{x})} = -\sqrt{2}$$

✎ **Esercizio 4.4.3.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2 \log(1 - 3\sqrt{x})}{\sqrt{2x} \sin^4 \sqrt{x}}$$

Si ha, per $x \rightarrow 0$

$$e^{2x} - 1 \sim 2x \quad \log(1 - 3\sqrt{x}) \sim -3\sqrt{x} \quad \sin^4 \sqrt{x} \sim (\sqrt{x})^4 = x^2$$

da cui

$$\frac{(e^{2x} - 1)^2 \log(1 - 3\sqrt{x})}{\sqrt{2x} \sin^4 \sqrt{x}} \sim \frac{4x^2 (-3\sqrt{x})}{\sqrt{2x} x^2} = -6\sqrt{2}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2 \log(1 - 3\sqrt{x})}{\sqrt{2x} \sin^4 \sqrt{x}} = -6\sqrt{2}.$$

▮ **Esercizio 4.4.4.** Calcolare per quale valore di $a \neq 0$ si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x \sin(ax)}$$

Si ha

$$\frac{\log(1 - x)}{x} \sim \frac{-x}{x} = -1$$

mentre

$$\frac{1 - \cos(ax)}{x \sin(ax)} \sim \frac{a^2 x^2}{2ax^2} = \frac{a}{2}$$

da cui il valore richiesto è $a = -2$.

▮ **Esercizio 4.4.5.** Calcolare per quale valore di α il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1) \sin^2 x}{1 - \cos x^\alpha}$$

è finito.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\beta$$

è finito se $\beta \geq 0$. Quindi osservando che

$$\frac{x(e^x - 1) \sin^2 x}{1 - \cos x^\alpha} \sim 2 \frac{x x x^2}{x^{2\alpha}} = 2x^{4-2\alpha}$$

bisogna imporre che $4 - 2\alpha \geq 0$ il che implica $\alpha \leq 2$.

▮ **Esercizio 4.4.6.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x - 3} \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

Se $x \rightarrow +\infty$ allora $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ per cui risulta, usando i limiti notevoli che

$$\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x - 3} \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x^2(x - 3)} = 1$$

✎ **Esercizio 4.4.7.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{1/2x}$$

Si ha

$$(1 + \sin x)^{1/2x} = e^{\frac{1}{2x} \log(1 + \sin x)};$$

a questo punto

$$\log(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sin x)^{1/2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

✎ **Esercizio 4.4.8.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x}$$

Si ha

$$\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x} = e^{2x \log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)};$$

a questo punto se $x \rightarrow +\infty$ allora $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ per cui risulta, usando i limiti notevoli che

$$\log\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \sim \frac{1}{x+1} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^2.$$

CAPITOLO 5

Proprietà globali delle funzioni continue o monotone su un intervallo

Fino a questo momento abbiamo valutato la continuità di una funzione in un punto. In questo capitolo ci occupiamo del problema di studiare la continuità di una funzione reale di variabile reale in un intervallo, cercando di studiare le conseguenze che questa ipotesi porta. La continuità su un intervallo formalizza il concetto geometrico di “tracciare il grafico senza staccare la penna dal foglio”. Naturalmente tutte le proprietà che andremo ad enunciare si basano sull’assioma di continuità dei numeri reali, per cui sono fundamentalmente legate al fatto di studiare la funzione su un intervallo di \mathbb{R} e perderebbero la loro validità se venisse considerato un intervallo di \mathbb{Q} .

5.1. Funzioni continue su un intervallo

Il primo risultato che andiamo a enunciare si chiama **TEOREMA DEGLI ZERI** e può essere utile per determinare gli zeri di una funzione, cioè per risolvere un’equazione del tipo $f(x) = 0$. Geometricamente questo problema corrisponde a trovare le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta $y = 0$. Questo sistema può avere infinite soluzioni reali, un numero finito di soluzioni o nessuna soluzione. Ogni soluzione si chiama **ZERO** di f . Il teorema degli zeri dà alcune semplici condizioni sotto le quali esiste uno zero e anche il modo per calcolarlo.

Teorema 5.1.1. (TEOREMA DEGLI ZERI) *Sia f continua in $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Se f è strettamente monotona, lo zero è unico.*

Diamo un'idea della dimostrazione di questo teorema, che è una dimostrazione *costruttiva* nel senso che dà un metodo non solo per mostrare l'esistenza dello zero ma anche per costruirlo. Questo metodo è noto come *metodo di bisezione*. La condizione $f(a)f(b) < 0$ ci dice che i valori di f agli estremi dell'intervallo sono di segno opposto. Consideriamo il punto medio dell'intervallo $[a, b]$. Sia r_1 tale punto. Se $f(r_1) = 0$ abbiamo finito perché abbiamo trovato uno zero. Sia allora $f(r_1) \neq 0$. Allora accade necessariamente uno dei due casi: o si ha $f(a)f(r_1) < 0$ oppure $f(r_1)f(b) < 0$. Nel primo caso si considera $[a, r_1]$ come nuovo intervallo; nel secondo caso si considera $[r_1, b]$. Su questo nuovo intervallo si sa che la funzione data è continua perché era globalmente continua sull'intervallo di partenza, si sa che f agli estremi del nuovo intervallo ha valori di segno opposto perché così è stato scelto l'intervallo e si sa che questo nuovo intervallo è lungo la metà del precedente. Consideriamo il punto medio di questo nuovo intervallo e sia r_2 tale punto. Allora possiamo iterare il procedimento continuando a considerare intervalli di lunghezza sempre dimezzata. Alla fine troviamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti proprietà:

- 1) $a_n \leq a_{n+1}$, $b_n \geq b_{n+1}$. Infatti ad ogni passo l'estremo sinistro dell'intervallo o rimane lui stesso o è il punto medio dell'intervallo considerato, che quindi è più grande; il contrario accade per l'estremo destro dell'intervallo;
- 2) ciascun intervallo è lungo la metà del precedente, quindi se $b-a$ è la lunghezza dell'intervallo di partenza, la lunghezza dell'intervallo al passo n sarà $(b-a)/2^n$;
- 3) $f(a_n)f(b_n) < 0$ per costruzione ad ogni passo.

Quindi le due successioni a_n e b_n costituite dagli estremi (sinistri e destri) degli intervalli considerati ad ogni passo sono successioni monotone, rispettivamente crescente e decrescente. Essendo monotone, ammettono limite, a priori diverso, quindi $a_n \rightarrow \ell_1$ e $b_n \rightarrow \ell_2$. Visto che

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

allora si ha che $\ell_1 = \ell_2$. Sia ℓ tale valore comune. Ma f è continua, quindi dal punto 3) si ha $f(\ell)^2 \leq 0$ (passando al limite una quantità che è sempre positiva, il limite può anche annullarsi, si vedano i teoremi di permanenza del segno e relativi controesempi). Ma un quadrato è sempre maggiore o uguale a zero, dunque l'unico caso ammissibile è che sia $f(\ell) = 0$. Tale valore ℓ è lo zero cercato di f .

Arrestando il procedimento dopo n passi si può assumere che a_n o b_n come valore approssimato dello zero di f . L'errore non è superiore a

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Il secondo risultato invece è di fondamentale importanza in particolar modo per i problemi di ottimizzazione.

Teorema 5.1.2. (TEOREMA DI WEIERSTRASS) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (quindi le ipotesi del teorema sono: funzione continua su un intervallo chiuso e limitato). Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$ ossia esistono x_m e x_M appartenenti ad $[a, b]$ tali che*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b].$$

☞ **Osservazione 5.1.3.** Osserviamo che le ipotesi del teorema sono tutte necessarie, nel senso che se si rimuove anche una sola delle ipotesi il teorema fallisce e si possono trovare opportuni controesempi. Infatti la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo aperto $(0, 1)$ non ha massimo né minimo (sarebbero 0 e 1 che sono rispettivamente estremo inferiore e superiore ma non sono raggiunti, non essendo f definita in quei punti). Per altro la funzione è continua su $(0, 1)$ però $(0, 1)$ è limitato ma non chiuso.

D'altra parte, la funzione $f(x) = x$ definita su tutto \mathbb{R} non ha ovviamente né massimo né minimo; per altro essa è continua ma l'insieme di definizione non è limitato.

Infine la funzione $f(x) = x$ per $x \in (0, 1)$ e $f(x) = 1/2$ per $x = 0$ e $x = 1$ è la funzione del primo esempio definita anche negli estremi dell'intervallo; per cui ora è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato ma non è continua. Infatti non ha massimo e minimo (di nuovo 0 è estremo inferiore e 1 estremo superiore ma non sono raggiunti).


Il prossimo risultato si può riassumere dicendo che l'immagine di un intervallo è un intervallo o anche che una funzione continua su un intervallo non può avere una finestra sull'immagine.

Teorema 5.1.4. (TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI) *Sia f una funzione continua su $[a, b]$. Allora per ogni λ tale che $m \leq \lambda \leq M$ con m minimo e M massimo di f su $[a, b]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = \lambda$.*

Riassumendo

Teorema 5.1.5. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f([a, b]) = [m, M]$, cioè l'immagine di un intervallo $[a, b]$ è un intervallo di estremi*

$$m = \min_{[a,b]} f \quad M = \max_{[a,b]} f.$$

 **Esempio 5.1.6.** *La funzione $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$ non soddisfa la tesi del teorema dei valori intermedi. Infatti ad esempio $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ ma non è vero che tutti i valori tra 1 e 4 sono raggiunti; ad esempio non c'è nessuna controimmagine dei valori 2 o 3 (ci sarebbe $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ rispettivamente ma non stanno in \mathbb{Q}). Quindi il teorema dei valori intermedi è vero per le funzioni continue definite su \mathbb{R} grazie all'assioma di continuità verificata dall'insieme dei numeri reali*

5.2. Funzioni monotone su un intervallo

In questo paragrafo lavoreremo con funzioni monotone su un intervallo, quindi non necessariamente continue. Il teorema che andremo a presentare è un'estensione del corrispondente teorema sulle successioni. La dimostrazione si basa sull'assioma di continuità di \mathbb{R} e il teorema si basa su una proprietà GLOBALE della funzione (ossia la sua monotonia su un intervallo).

Teorema 5.2.1. (TEOREMA DI MONOTONIA) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per ogni $c \in (a, b)$ esistono finiti i limiti destro e sinistro per $x \rightarrow c$. Ai due estremi a e b esistono i limiti destro (in a) e sinistro (in b), eventualmente infiniti.*

Una conseguenza del teorema di monotonia è che se una funzione è monotona in un intervallo (a, b) , i suoi eventuali punti di discontinuità in (a, b) sono necessariamente punti di DISCONTINUITÀ A SALTO, ad eccezione degli estremi a e b in cui si può avere anche un asintoto verticale.

5.3. Continuità e invertibilità

Sappiamo già che una funzione definita su un intervallo e strettamente monotona è invertibile (con inversa monotona). Sappiamo anche che il viceversa in generale non è vero (cioè esistono funzioni invertibili su un intervallo che non sono monotone), basta prendere ad esempio $f(x) = x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 1/x + 1$ per $x \in [1, 2]$.

Tuttavia se si aggiunge l'ipotesi della continuità, il teorema si inverte. Più precisamente.

Teorema 5.3.1. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo, una funzione continua su I . Allora f è invertibile in I se e soltanto se è strettamente monotona. In tal caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua.*

La dimostrazione di questo risultato si basa sul teorema dei valori intermedi, sul teorema di monotonia per f e sull'assioma di continuità dei numeri reali. Si ha inoltre il seguente

Corollario 5.3.2. *Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha inversa continua.*

Questo fatto completa la dimostrazione del teorema di continuità delle funzioni elementari, per cui visto che le funzioni esponenziali sono continue allora lo sono anche le funzioni logaritmiche; visto che le funzioni trigonometriche $\sin x, \cos x, \tan x$ sono continue, lo sono anche le loro inverse $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$.

5.4. Esercizi proposti

✎ **Esercizio 5.4.1.** *Dimostrare che l'equazione $x^3 - 2x - 3 = 0$ ha una soluzione nell'intervallo $[1, 2]$.*

Se poniamo $f(x) = x^3 - 2x - 3$ si ha $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 < 0$ mentre $f(2) = 8 - 4 - 3 = 1 > 0$ quindi f è continua su $[1, 2]$ e assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto, quindi dal teorema degli zeri, esiste $c \in [1, 2]$ tale che $f(c) = 0$ che è quanto si richiedeva.

✎ **Esercizio 5.4.2.** *Dimostrare che l'equazione $x^3 - 15x + 1 = 0$ ha tre soluzioni nell'intervallo $[-4, 4]$.*

Si pone $f(x) = x^3 - 15x + 1$; l'obiettivo è dimostrare che f ha tre zeri nell'intervallo considerato. Osserviamo che $f(-4) = (-4)^3 - 15(-4) + 1 = -64 + 60 + 1 = -3 < 0$; $f(4) = 64 - 60 + 1 = 5 > 0$, dunque la funzione data è continua su $[-4, 4]$ e agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto, dunque dal teorema degli zeri esiste $c \in [-4, 4]$ tale che $f(c) = 0$. A questo punto abbiamo mostrato che la funzione data ha almeno uno zero.

Osserviamo che $f(0) = 1 > 0$ mentre $f(1) = -13 < 0$ dunque la funzione, essendo ben definita e continua su tutto \mathbb{R} , in particolare è anche continua sugli intervalli $[-4, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 4]$ e in ciascuno dei precedenti intervalli la funzione (per i calcoli svolti precedentemente) assume valori di segno opposto. Quindi dal teorema degli zeri esistono c_1, c_2, c_3 tali che $c_1 \in [-4, 0]$, $c_2 \in [0, 1]$ e $c_3 \in [1, 4]$ con $f(c_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$ che è quanto veniva richiesto.

✎ **Esercizio 5.4.3.** *Determinare quante soluzioni ha l'equazione*

$$\sin x + 1 - x^2 = 0$$

0 1 2 3

Ponendo $f(x) = \sin x + 1 - x^2$, il problema proposto equivale a trovare gli zeri della f . Si ha che $f(0) = 1$ mentre $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ dunque ci sono due sole possibilità (viste le proposte di soluzioni del test, naturalmente): siccome f parte da meno infinito e va di nuovo a meno infinito, o sta tutta sotto l'asse delle x oppure se interseca l'asse delle x una volta lo deve fare di nuovo. Questo significa che l'equazione o ha zero soluzioni o ne ha due. Siccome $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$, significa che definitivamente, se $x \rightarrow \pm\infty$ allora la funzione data è negativa; quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) < 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Ma $f(0) = 1 > 0$ quindi si può applicare il teorema degli zeri due volte, rispettivamente negli intervalli $[0, M]$ e $[-M, 0]$ e dunque esistono due zeri della funzione e quindi due soluzioni dell'equazione data. La risposta corretta è dunque 2.

✎ **Esercizio 5.4.4.** *Determinare quante soluzioni ha l'equazione*

$$2xe^{-x} = \frac{1}{2}$$

0 1 2 3

Ponendo $f(x) = 2xe^{-x} - \frac{1}{2}$, il problema proposto equivale a trovare gli zeri della f . Si ha che $f(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0$ mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ dunque ripetendo il ragionamento dell'esercizio precedente, si ha un numero pari di soluzioni, quindi o zero soluzioni o due. Dai limiti agli estremi del dominio, si ha che definitivamente, se $x \rightarrow \pm\infty$ la funzione data è negativa; quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici

rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) < 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Ma $f(1) > 0$ quindi si può applicare il teorema degli zeri due volte, rispettivamente negli intervalli $[1, M]$ e $[-M, 1]$ e dunque esistono due zeri della funzione e quindi due soluzioni dell'equazione data. La risposta corretta è di nuovo dunque 2.

✎ **Esercizio 5.4.5.** *Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'equazione*

$$e^x = x^2 - 2x + k$$

ha almeno una soluzione.

Ponendo $f(x) = e^x - x^2 - 2x + k$ si ha che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, quindi la funzione “parte” da meno infinito e “arriva” a più infinito. Quindi se $x \rightarrow -\infty$ allora f è definitivamente negativa; se $x \rightarrow +\infty$ f è definitivamente positiva, quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) < 0$ e $f(-M) > 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$, quindi si può applicare il teorema degli zeri all'intervallo $[-M, M]$ e ottenere che la funzione data ha almeno uno zero; questo accade indipendentemente dal valore di k da cui la tesi.

✎ **Esercizio 5.4.6.** *Determinare quanti sono i punti di intersezione tra i due grafici*

$$f(x) = x^2 + x \quad g(x) = 2x^2 + 1$$

Osserviamo che il metodo grafico di disegnare le due funzioni e vedere quante intersezioni hanno può essere agevole nel caso di funzioni di facile espressione, come in questo caso, ma può diventare difficile o addirittura fuorviante (e portare quindi a una conclusione errata) nel caso di funzioni diverse da polinomi. Quindi è sempre meglio evitare il metodo grafico e usare il metodo analitico, basato su dimostrazioni.

Nel nostro caso, ponendo $h(x) = g(x) - f(x) = 2x^2 + 1 - x^2 - x = x^2 - x + 1$, il problema di trovare le intersezioni tra i grafici di f e g si riconduce al problema di trovare gli zeri di h . L'equazione $x^2 - x + 1 = 0$ banalmente non ha zeri (è un “falso quadrato”, o anche è un'equazione di secondo grado con discriminante negativo). Quindi non ci sono intersezioni tra i due grafici.

✎ **Esercizio 5.4.7.** *Determinare quanti sono i punti di intersezione tra i due grafici*

$$f(x) = 3 \log x \quad g(x) = x - 3$$

$$\square 0 \quad \square 1 \quad \square 2 \quad \square 3$$

Valgono le osservazioni dell'esercizio precedente riguardo al metodo grafico.

A questo punto, ponendo $h(x) = f(x) - g(x) = 3 \log x - x + 3$, il problema di trovare le intersezioni tra i grafici di f e g si riconduce al problema di trovare gli zeri di h . La funzione h (come la funzione f) è definita solo per $x > 0$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

quindi la funzione, sia per $x \rightarrow 0^+$ che per $x \rightarrow +\infty$ è definitivamente negativa. Siccome $h(1) = 2 > 0$, esisteranno due valori $M_1 \in (0, 1)$ e $M_2 > 1$ tali che $f(M_1) < 0$ e $f(M_2) < 0$; quindi essendo la funzione h continua sul suo dominio di definizione, lo sarà a maggior ragione sull'intervallo chiuso e limitato $[M_1, M_2]$. Applicando il teorema degli zeri due volte, negli intervalli rispettivamente $[M_1, 1]$ e $[1, M_2]$ si ottiene che esistono almeno due zeri di h , e quindi due intersezioni tra i grafici delle funzioni f e g . Allora guardando le soluzioni proposte si ha che la risposta corretta è 2.

✎ **Esercizio 5.4.8.** *Sia $h(x)$ una funzione continua che soddisfa $h(0) = -2$ e $h(1) = 0$. Allora è sempre vero che esiste un valore $x_0 \in (0, 1)$ tale che*

$$\square h(x_0) = 3 + x_0^2 \quad \square h(x_0) + 3 + x_0^2 = 0 \quad \square h(x_0) = 3x_0^2 \quad \square h(x_0) + 3x_0^2 = 0$$

Poniamo

$$f_1(x) = h(x) - 3 - x^2 \quad f_2(x) = h(x) + 3 + x^2 \quad f_3(x) = h(x) - 3x^2 \quad f_4(x) = h(x) + 3x^2$$

Allora si ha che

$$\begin{aligned} f_1(0) &= h(0) - 3 = -5 < 0 & f_1(1) &= h(1) - 4 = -4 < 0 \\ f_2(0) &= h(0) + 3 = 1 > 0 & f_2(1) &= h(1) + 4 = 4 > 0 \\ f_3(0) &= h(0) = -2 < 0 & f_3(1) &= h(1) - 3 = -3 < 0 \\ f_4(0) &= h(0) = -2 < 0 & f_4(1) &= h(1) + 3 = 3 > 0. \end{aligned}$$

Quindi le quattro funzioni f_i sono tutte continue nell'intervallo $[0, 1]$ e solo la funzione f_4 assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri ottengo

che la funzione f_4 ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in [0, 1]$ tale che $h(x_0) + 3x_0^2 = 0$. Il fatto che le altre funzioni non assumano valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo non vuol dire ovviamente che non abbiano zeri in $[0, 1]$ ma ciò non è sicuro, quindi la risposta esatta è la quarta.

✎ **Esercizio 5.4.9.** Sia $h(x)$ una funzione continua che soddisfa $h(-1) = 1$ e $h(0) = 2$. Allora è sempre vero che esiste un valore $x_0 \in (-1, 0)$ tale che

$$\square h(x_0) - 1 + x_0 = 0 \quad \square h(x_0) + 2 + x_0^2 = 0 \quad \square h(x_0) - x_0 - 1 = 0 \quad \square h(x_0) + 2 - x_0^2 = 0$$

Poniamo

$$f_1(x) = h(x) - 1 + x \quad f_2(x) = h(x) + 2 + x^2 \quad f_3(x) = h(x) - x - 1 \quad f_4(x) = h(x) + 2 - x^2$$

Allora si ha che

$$\begin{aligned} f_1(-1) &= h(-1) - 2 = -1 < 0 & f_1(0) &= h(0) - 1 = 1 > 0 \\ f_2(-1) &= h(-1) + 3 = 4 > 0 & f_2(0) &= h(0) + 2 = 4 > 0 \\ f_3(-1) &= h(-1) = 1 > 0 & f_3(0) &= h(0) - 1 = 1 > 0 \\ f_4(-1) &= h(-1) + 2 - 1 = 2 > 0 & f_4(0) &= h(0) + 2 = 4 > 0. \end{aligned}$$

Quindi le quattro funzioni f_i sono tutte continue nell'intervallo $[-1, 0]$ e solo la funzione f_1 assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri ottengo che la funzione f_1 ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in [0, 1]$ tale che $h(x_0) - 1 + x_0 = 0$, quindi la risposta esatta è la prima.

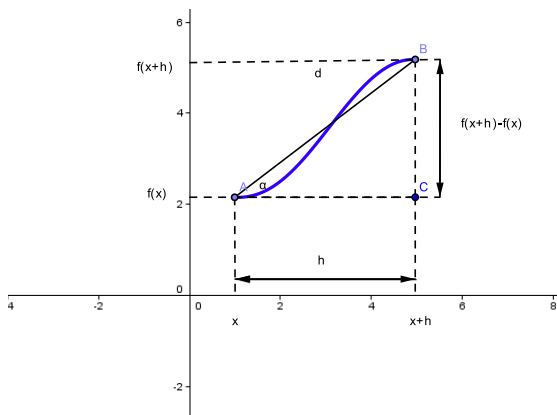
CAPITOLO 6

Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale

In questo capitolo svilupperemo i concetti fondamentali del calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale. Utilizzeremo il concetto di limite, anzi storicamente il concetto di limite è proprio nato per sviluppare le idee del calcolo differenziale. Il calcolo differenziale permette non solo di risolvere certi problemi, ma anche di dar senso ad essi. Per esempio un problema fondamentale è quello di definire in maniera rigorosa il concetto di retta tangente a una funzione in un punto, concetto per nulla scontato e di fondamentale importanza per esempio nei problemi di ottimizzazione: è facile convincersi infatti che nei punti di massimo o minimo di una funzione “sufficientemente regolare” la tangente è orizzontale. Per cui già Fermat intorno al 1630 ha elaborato l’idea che per cercare i punti di massimo o minimo di una funzione uno poteva scrivere analiticamente la retta tangente alla curva in un punto e poi vedere in quali punti essa è orizzontale. L’idea è di considerare la retta per due punti, uno fisso sulla funzione e uno mobile, che pian piano si sposta verso l’altro. Questo concetto di spostamento è espresso attraverso un passaggio al limite, per cui anche oggi la derivata in un punto si definisce come limite del rapporto incrementale e rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto.

6.1. Definizione di derivata e derivate di funzioni elementari

Vediamo allora cosa significa fare il limite del rapporto incrementale. Supponiamo di avere una funzione f definita almeno su un intervallo e ivi continua. Sia x un punto di tale intervallo e sia h tale che $x + h$ appartiene ancora a quell’intervallo; il grafico evidenzia un esempio con $h > 0$ (ma non è obbligatorio). In tal caso i punti A e B appartenenti al grafico di f avranno



coordinate $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$. Allora avremo che

$$\overline{AC} = h \quad \overline{CB} = f(x + h) - f(x).$$

Quindi l'incremento dato alla f coincide con la variazione del grafico rispetto alle ordinate e quindi alla lunghezza del segmento \overline{CB} . Viceversa h cioè la differenza tra le ascisse dei due punti, cioè la variazione data rispetto alle ascisse rappresenta la lunghezza del segmento \overline{AC} . A questo punto se si vuole andare a considerare il rapporto tra queste due quantità si ottiene

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Quest'ultimo rapporto prende il nome di RAPPORTO INCREMENTALE DI f RELATIVO ALL'INTERVALLO $[x, x + h]$.

Geometricamente, visto che il triangolo ABC è rettangolo, si ha che

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \tan \alpha$$

dove α è l'angolo compreso tra la direzione data dalla retta AB e la direzione data dalla retta AC . Il rapporto incrementale dunque coincide con il coefficiente angolare della retta AB .

Ora, se h tende a zero, il punto A rimane fisso mentre il punto B si avvicina (fino a coincidere) con il punto A ; contemporaneamente la retta secante AB varia la sua pendenza assestandosi a una posizione limite. La retta limite prende il nome di RETTA TANGENTE al grafico di f nel punto di ascissa x e la sua pendenza (o il suo coefficiente angolare) prende il nome di DERIVATA PRIMA di f in x . Possiamo dunque dare la seguente definizione.

□ **Definizione 6.1.1.** Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. f si dice DERIVABILE in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e tale limite prende il nome di DERIVATA PRIMA (O DERIVATA) di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}|_{x=x_0} \quad Df(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

Si ha dunque

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si chiama RETTA TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

☞ **Osservazione 6.1.2.** Se f è derivabile in ogni punto di (a, b) è definita la funzione

$$\begin{aligned} f' : (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

In tal caso ha senso chiedersi se $f'(x)$ è a sua volta derivabile. In caso di risposta affermativa, la sua derivata si chiamerà DERIVATA SECONDA e così via iterando il procedimento è possibile arrivare alla DERIVATA ENNESIMA

Ora vediamo di calcolare, *attraverso la definizione* le derivate di alcune funzioni elementari.

	f	f'		f	f'
1.	c	0	10.	e^x	e^x
2.	x	1	11.	$\log x$	$\frac{1}{x}$
3.	x^2	$2x$	12.	$a^x, a > 0$	$a^x \log a$
4.	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	13.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
5.	\sqrt{x}	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	14.	$\sinh x$	$\cosh x$
6.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	15.	$\cosh x$	$\sinh x$
7.	$\sin x$	$\cos x$	16.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8.	$\cos x$	$-\sin x$	17.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	18.	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

1. Sia $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Dimostriamo che $f'(x) = 0$. Si ha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

2. Sia $f(x) = x$. Dimostriamo che $f'(x) = 1$. Si ha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1.$$

3. Sia $f(x) = x^2$. Dimostriamo che $f'(x) = 2x$. Si ha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x.$$

4. e **5.** (così come **1.**, **2.**, **3.**) sono casi particolari di **6.**.

6. Sia $f(x) = x^\alpha$. Dimostriamo che $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1 \right]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x^\alpha \frac{\alpha \frac{h}{x}}{h} \\ &= \alpha x^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il seguente fatto (con $\varepsilon(h) = h/x$)

$$(1+\varepsilon(h))^\alpha - 1 \sim \alpha\varepsilon(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

dove $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$. Infatti

$$(1 + \varepsilon(h))^\alpha - 1 = \exp(\alpha \log(1 + \varepsilon(h))) - 1 \sim \exp(\alpha\varepsilon(h)) - 1 \sim \alpha\varepsilon(h).$$

7. Sia $f(x) = \sin x$. Dimostriamo che $f'(x) = \cos x$. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow 1} \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

La dimostrazione di **8.** è analoga a quella di **7.**. La dimostrazione di **9.** sarà chiara dopo aver visto il teorema della derivazione della funzione composta e l'algebra delle derivate; lo stesso per quanto riguarda la dimostrazione di **12.**, **13.**, **14.**, **15.**. La dimostrazione di **16.**, **17.**, **18.** li vedremo quando introdotto il teorema della funzione inversa. Infine ora vediamo le dimostrazioni di **10.** e **11.**.

10. Sia $f(x) = e^x$. Dimostriamo che $f'(x) = e^x$. Si ha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \underbrace{\left[\frac{e^h - 1}{h} \right]}_{\downarrow 1} = e^x$$

11. Sia $f(x) = \log x$. Dimostriamo che $f'(x) = \frac{1}{x}$. Si ha

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{xh} = \frac{1}{x}.$$

6.2. Punti angolosi, cuspidi e flessi a tangente verticale

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che se f è derivabile in un punto x_0 allora il grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ammette una retta tangente ben definita. In questo paragrafo vediamo cosa succede se f non è derivabile in un qualche punto.

6.2.1. Punti angolosi

Consideriamo la funzione

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Allora si ha che

$$f'(x) = |x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \end{cases}$$

dove nell'ultimo caso, usando la definizione (indispensabile per calcolare la derivata in un punto dove la funzione è definita a tratti!) si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Quindi f non è derivabile nell'origine (perché non esiste il limite del rapporto incrementale) e graficamente anche la retta tangente non è ben definita. Tuttavia esistono il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale di $|x|$ quindi esiste la derivata destra (e la retta tangente "da destra") e la derivata sinistra (e la retta tangente "da sinistra") e sono diverse, per cui in $(0, 0)$ graficamente si forma un angolo tra le due direzioni. Più in generale si ha la seguente definizione.

□ **Definizione 6.2.1.** Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in (a, b)$. Allora se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

oppure

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

allora f si dice DERIVABILE DA DESTRA (oppure DERIVABILE DA SINISTRA) e il precedente limite finito si indica con il simbolo $f'_+(x_0)$ (oppure $f'_-(x_0)$).

Nel caso in cui f sia continua e derivabile sia da destra che da sinistra (ma non derivabile globalmente!) in un punto x_0 allora si dice che f ha un PUNTO ANGOLOSO in $x = x_0$.

□ **Definizione 6.2.2.** La derivata della funzione valore assoluto (dove esiste) si chiama FUNZIONE SEGNO e si ha

$$\frac{d|x|}{dx} = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

6.2.2. Flessi a tangente verticale e cuspidi

Abbiamo visto che una delle possibilità perché una derivata non esista in un qualche punto è che non esista il limite del rapporto incrementale pur esistendo il limite destro e sinistro (punto angoloso). Un'altra possibilità è che esista il limite del rapporto incrementale ma sia infinito, cioè si abbia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty.$$

In tal caso, per definizione, f non è derivabile in x_0 (perché per essere derivabile in un punto, deve esistere *finito* il limite del rapporto incrementale in quel punto) però geometricamente il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle ordinate. Infatti ricordando il significato geometrico della derivata come coefficiente angolare della retta tangente, in questo caso il coefficiente angolare è infinito. Si parla dunque di FLESSO A TANGENTE VERTICALE. Invece si ha la seguente

□ **Definizione 6.2.3.** Se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e contemporaneamente $f'_-(x_0) = \mp\infty$ allora si dice che f in x_0 ha una CUSPIDE.

☞ **Osservazione 6.2.4.** Il caso misto in cui una derivata (da destra o da sinistra) è finita e una infinita allora si dice comunque PUNTO ANGOLOSO. Il caso in cui ad esempio f è definita solo per $x \geq x_0$ e la derivata destra è infinita, si parla di FLESSO A TANGENTE VERTICALE; esempio $f(x) = \sqrt{x}$.

6.3. Continuità e derivabilità

Si ha il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6.3.1. *Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 .*

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h \sim f'(x_0) h \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

da cui

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

che è la continuità di f in x_0 (basta fare un cambio di variabili e porre $x := x_0 + h$: se $h \rightarrow 0$ allora $x \rightarrow x_0$). \square

Abbiamo le seguenti importanti conseguenze:

- 1) se f è discontinua in x_0 non può essere derivabile in x_0 ;
- 2) non vale il viceversa del teorema, cioè se f è continua in x_0 , non necessariamente f è derivabile in x_0 . Controesempio: $f(x) = |x|$.

6.4. Regole di calcolo delle derivate

Teorema 6.4.1. (ALGEBRA DELLE DERIVATE) *Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) . Allora anche $f \pm g$, $f g$, f/g (con $g \neq 0$) sono funzioni derivabili in (a, b) e valgono le seguenti formule:*

$$\begin{aligned} 1) & \quad (f \pm g)' = f' \pm g' \\ 2) & \quad (f g)' = f' g + f g' \\ 3) & \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2} \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} 4) & \quad (k f)' = k f' \quad k \text{ costante} \\ 5) & \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \end{aligned}$$

6.5. Derivata della funzione composta e inversa

Teorema 6.5.1. (REGOLA DELLA CATENA (CHAIN RULE)) *Sia $g \circ f$ la funzione composta da due funzioni f e g . Se f è derivabile in x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Questo teorema può anche essere generalizzato; per esempio

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) g'(h(x)) h'(x).$$

Teorema 6.5.2. (DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile in (a, b) e sia $g = f^{-1}$ la sua inversa definita in $f(a, b)$. Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a, b)$. Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

6.6. Esercizi proposti

✎ **Esercizio 6.6.1.** *Sia $f(x) = xe^x$ e sia g la funzione inversa di f . Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(e, 1)$.*

L'equazione richiesta è:

$$y = g(y_0) + g'(y_0)(x - y_0)$$

dove $y_0 = e$ è tale che $f(1) = e = y_0$. Quindi se $x_0 = 1$, il teorema della derivata della funzione inversa ci dice (senza bisogno di ricavare l'espressione esplicita di g !) che g è derivabile e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Da notare che la derivata di f si calcola NON in y_0 ma in x_0 che è tale che $f(x_0) = y_0$ (e naturalmente $g(y_0) = x_0$).

Quindi $f'(x) = e^x(x+1)$ da cui $f'(1) = 2e$. Allora $g'(e) = 1/2e$ e l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$y = 1 + \frac{1}{2e}(x - e).$$

✎ **Esercizio 6.6.2.** Sia $f(x) = x + e^x$ e sia g la funzione inversa di f . Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(1, 0)$.

L'equazione richiesta è:

$$y = g(y_0) + g'(y_0)(x - y_0)$$

dove $y_0 = 1$ è tale che $f(x_0) = f(0) = 1 = y_0$ (e naturalmente $g(1) = 0$). Quindi se $x_0 = 0$, il teorema della derivata della funzione inversa ci dice (senza bisogno di ricavare l'espressione esplicita di g !) che g è derivabile e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Quindi $f'(x) = 1 + e^x$ da cui $f'(0) = 2$. Allora $g'(1) = 1/2$ e l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$y = \frac{1}{2}(x - 1).$$

✎ **Esercizio 6.6.3.** Per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $r(x) = x + \beta$ è tangente al grafico di $f(x) = \log(2+x)$?

Il coefficiente angolare della retta r è $m = 1$. Per il significato geometrico della derivata di una funzione in un punto, se r deve essere tangente al grafico di f vuol dire che la derivata di f nel punto di tangenza deve essere 1. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2+x};$$

se impongo $f'(x) = 1$ ottengo $x = -1$. A questo punto $f(-1) = \log(2-1) = 0$; quindi impongo che la retta r passi per il punto $(-1, 0)$ (che è il punto di tangenza!) da cui $r(-1) = -1 + \beta = 0$. Quindi il valore richiesto è $\beta = 1$.

▮ **Esercizio 6.6.4.** Per quali valori di h e k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 \arctan x & x < 1 \\ 2hx + k & x \geq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile?

Innanzitutto la funzione data è continua per $x < 1$ perché la funzione arcotangente è continua; inoltre f è continua per $x > 1$ perché è un polinomio di primo grado. Quindi l'unico punto dove occorre verificare la continuità è $x = 1$. Si deve avere che il limite destro coincide con il limite sinistro ed entrambi devono essere uguali al valore della funzione nel punto $x = 1$. Questo darà una prima condizione sui coefficienti h e k . Si deve avere dunque

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

cioè

$$4 \arctan 1 = \pi = 2h + k.$$

Per quanto riguarda la derivabilità, si nuovo la funzione è derivabile per $x > 1$ e per $x < 1$; per verificare per quali valori dei parametri è derivabile in $x = 1$ si può usare il seguente teorema.

Teorema 6.6.5. Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua in a , derivabile in (a, b) e supponiamo che esista (finito o infinito)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*.$$

Allora esiste anche $f'_+(a) = m$. Analogamente in b .

Questo significa che per verificare che una funzione definita a tratti è derivabile in un punto, è sufficiente calcolare il limite *da destra* della funzione derivata prima e il limite *da sinistra* della funzione derivata prima. Il tal caso se essi esistono sono uguali rispettivamente ai valori della derivata *destra* e *sinistra* della funzione. Se poi coincidono, allora la funzione è anche derivabile nel punto.

Nel nostro caso si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{1+x^2} = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2h.$$

Quindi mettendo insieme le due condizioni ottenute, si ottiene che per $h = 1$ e $k = \pi - 2$ la funzione data è continua e derivabile.

6.7. Punti stazionari; massimi e minimi locali

Uno degli usi più proficui del calcolo differenziale è la ricerca di massimi e minimi per funzioni reali di una variabile reale. Questo prende il nome di OTTIMIZZAZIONE.

Richiamiamo la definizione di massimo e minimo locale e globale.

□ Definizione 6.7.1. Si dice che M è MASSIMO di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è PUNTO DI MASSIMO per f in $[a, b]$ se $f(x_0) = M \geq f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.

Analogamente si dice che m è MINIMO di f in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$ è PUNTO DI MINIMO per f in $[a, b]$ se $f(x_0) = m \leq f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.

Si dice che M è MASSIMO LOCALE per f e che $x_0 \in [a, b]$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $M = f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Analogamente si dice che m è MINIMO LOCALE per f e che $x_0 \in [a, b]$ è PUNTO DI MINIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $m = f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$.

Premettiamo alcuni esempi fondamentali a cui faranno seguito alcune osservazioni.

✎ **Esempio 6.7.2.** Sia $f(x) = x^2$. Essa ha un minimo (globale perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) in $x = 0$; per altro $f'(x) = 2x$ che si annulla per $x = 0$. Questa funzione non ha massimo globale, però la sua restrizione a $[-1, 2]$ ha un massimo locale in $x = -1$ e un massimo globale in $x = 2$.

✎ **Esempio 6.7.3.** Sia $f(x) = |x|$. Essa ha un minimo (globale perché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) in $x = 0$; per altro $x = 0$ è un punto di non derivabilità per f .

✎ **Esempio 6.7.4.** Sia $f(x) = x^3$. La sua derivata è $f'(x) = 3x^2$ che si annulla per $x = 0$ ma esso non è un punto di massimo né di minimo (né locale né globale).

✎ **Esempio 6.7.5.** Sia $f(x) = \sin x$. Essa è limitata e ammette massimo e minimo. Il massimo è 1 ed è raggiunto dai punti $x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ che sono tutti punti di massimo globale. Il minimo è -1 ed è raggiunto dai punti $x = 3/2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, che sono tutti punti di minimo globale.

✎ **Esempio 6.7.6.** Sia $f(x) = \arctan x$. Anche questa funzione è limitata, ma non ammette massimo e minimo (infatti $\pi/2$ è l'estremo superiore e $-\pi/2$ è l'estremo inferiore, ma non vengono raggiunti da alcun punto nel dominio).

✎ **Osservazione 6.7.7.** Si possono fare le seguenti osservazioni:

1) il massimo o il minimo se esistono sono unici; i punti di massimo o minimo NON sono necessariamente unici. I massimi o minimi locali possono anche essere più di uno.

2) Ogni estremo globale è anche locale. Nei punti di estremo locale o globale la funzione può non essere derivabile e può persino essere discontinua. I punti di estremo possono anche trovarsi nei bordi dell'intervallo.

3) Una funzione limitata non è detto che ammetta massimo o minimo (globale).

L'obiettivo di questo capitolo è quello di trovare delle condizioni che ci garantiscano l'esistenza di estremi locali o globali.

La prima cosa che si osserva è che come detto i punti di estremo possono anche trovarsi in punti in cui la funzione non è derivabile (o non è nemmeno continua), ma se una funzione f è derivabile in un certo punto x_0 e ammette in x_0 un punto di massimo o minimo locale (x_0 diverso dagli estremi dell'intervallo) allora la derivata in quel punto si annulla e la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale. Si ha dunque il seguente teorema.

Teorema 6.7.8. (FERMAT) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x \in (a, b)$. Se x è punto di estremo locale allora $f'(x) = 0$.*

I punti in cui f' si annulla si dicono PUNTI STAZIONARI per f . Quindi abbiamo appena visto che se x non si trova agli estremi dell'intervallo nel quale f è definita, allora x estremo locale implica x stazionario. Il viceversa può non valere, come già visto, prendendo ad esempio $f(x) = x^3$. Si parla in tal caso di FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

Abbiamo il seguente importante risultato, utile sia per sé che perché interviene nella dimostrazione di altri risultati.

Teorema 6.7.9. (TEOREMA DEL VALOR MEDIO O DI LAGRANGE) *Sia f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$ (cioè continua fino agli estremi dell'intervallo). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vediamo l'*interpretazione geometrica* di questo teorema. La quantità $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ rappresenta il rapporto incrementale della funzione e geometricamente la pendenza della retta che congiunge i due punti che hanno per ascisse gli estremi dell'intervallo. $f'(c)$ rappresenta per definizione il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(c, f(c))$. Quindi il teorema del valor medio o di Lagrange esprime il fatto che nel punto $(c, f(c))$ la tangente al grafico di f è PARALLELA alla retta che congiunge i punti di ascisse gli estremi dell'intervallo considerato.

Conseguenza: ricordando di nuovo il significato geometrico della derivata, si deduce subito

che se una funzione derivabile è crescente, oppure decrescente in un intervallo (a, b) , allora la sua derivata è ≥ 0 o rispettivamente ≤ 0 . Usando il teorema di Lagrange si può dimostrare che vale anche il viceversa. Si ha dunque:

Teorema 6.7.10. (TEST DI MONOTONIA) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora $\forall x \in (a, b)$:*

$$f \text{ crescente} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ decrescente} \Leftrightarrow f'(x) \leq 0.$$

Con la stessa dimostrazione si vede anche che vale il seguente risultato.

Teorema 6.7.11. (CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

$$f' = 0 \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è costante in } (a, b).$$

Il precedente risultato non vale più se si considerano insiemi più generali di intervalli, come mostra il seguente controesempio.

✎ **Esempio 6.7.12.** *Sia $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$. Si noti che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è un intervallo ma è l'unione di due intervalli. Si ha*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Quindi applicando il precedente teorema si ha che f è costante in ciascuno dei due intervalli $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0)$ ma f non è globalmente costante. Per vedere quanto vale basta calcolare la f in due punti “comodi”, per esempio in 1 e -1 . Si ha

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

mentre

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

quindi riassumendo

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Se la disuguaglianza è stretta, il test di monotonia vale solo in un senso. Infatti:

Proposizione 6.7.13. *Sia f continua su (a, b) e tale che $f'(x) > 0$ (rispettivamente $f'(x) < 0$) per ogni x interno ad (a, b) . Allora f risulta strettamente crescente (rispettivamente strettamente decrescente) su (a, b) .*

☞ **Osservazione 6.7.14.** Il viceversa non vale: infatti $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su \mathbb{R} (e quindi su ogni intervallo in esso contenuto) ma la sua derivata non è strettamente positiva (si annulla in $x = 0$).

☞ **Osservazione 6.7.15.** Il test di monotonia è falso di nuovo se (a, b) non è un intervallo. Infatti ad esempio $f(x) = 1/x$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la sua derivata è $-1/x^2 < 0$; tuttavia f non è strettamente decrescente.

📎 **Esempio 6.7.16.** *Mostriamo che $e^x > \sin x + \cos x$ per ogni $x \in (0, \pi/2) =: I$, usando ripetutamente il precedente test di monotonia. Allora posto $f(x) = e^x - \sin x - \cos x$ si ha*

$$f'(x) = e^x - \cos x + \sin x \quad f''(x) = e^x + \sin x + \cos x$$

dunque

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f' \text{ strettamente crescente su } I$$

da cui, visto che $f'(0) = 0$ si ha che anche $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, quindi per il test di monotonia anche f è strettamente crescente, ma visto che $f(0) = 0$ allora $f(x) > 0$ per ogni $x \in I$, che è quanto volevamo dimostrare.

Corollario 6.7.17. *Se f è derivabile su I intervallo e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ allora:*

- 1) *se $f'(x) < 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) > 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale stretto per f .*
- 2) *se $f'(x) > 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) < 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di massimo locale stretto per f .*
- 3) *se f' non cambia segno in un intorno di x_0 allora x_0 non è né punto di massimo né punto di minimo per f .*

Corollario 6.7.18. *Se f è derivabile in I e $x_0 \in I$ è tale che $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$ allora:*

- 1) *se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale stretto per f ;*
- 2) *se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo locale stretto per f .*

Non vale il viceversa del precedente corollario, nel senso che se x_0 è punto di massimo locale stretto per f non è detto che f risulti monotona in alcun intorno di x_0 , destro o sinistro. Controesempio:

$$f(x) = -|x| + \frac{|x|}{2} \sin \frac{1}{x}.$$

✎ **Esercizio 6.7.19.** Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{\pi}{2} + \pi + b & x \geq \frac{\pi}{2} \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) Per quali valori di a e b la funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, \pi]$?

2) Per tali valori di a e b trovare almeno un punto che soddisfi la tesi del Teorema di Lagrange.

1) Per soddisfare le ipotesi del Teorema di Lagrange in $[0, \pi]$ occorre dimostrare che f è continua su $[0, \pi]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(0, \pi)$. Sicuramente la funzione è continua per $x < \pi/2$ e per $x > \pi/2$ (composizione di funzioni continue), quindi bisogna solo dimostrare la continuità in $x = \pi/2$. Si deve avere

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

quindi si deve avere

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \pi + b = a \sin(\pi) = \pi + b$$

da cui si ricava $b = -\pi$.

Per quanto riguarda la derivabilità, occorre dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f'(x)$$

da cui

$$a \cos \pi = \frac{\pi}{2}$$

da cui si ricava $a = -\frac{\pi}{2}$.

Concludendo i valori di a e b per cui f è continua e derivabile sono $a = -\pi/2$ e $b = -\pi$.

Inserendo tali valori nell'espressione di f si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{\pi}{2}x & x \geq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

2) Occorre trovare almeno un punto z che soddisfi la tesi del Teorema di Lagrange. Questo significa trovare $z \in [0, \pi]$ tale che

$$f'(z) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}(\pi + 1).$$

Notiamo che basta trovarne uno solo. A questo punto, se $z < \pi/2$ allora si deve trovare z tale che

$$f'(z) = -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = -\frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos z - \sin \frac{\pi}{2} \sin z\right) = -\frac{\pi}{2} \sin z$$

da cui risulterebbe

$$-\frac{\pi}{2} \sin z = \frac{\pi + 1}{2}$$

e dunque

$$\sin z = -1 - \frac{1}{\pi}$$

assurdo.

Invece se $z > \pi/2$ si cerca z tale che

$$f'(z) = 2z - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(\pi + 1)$$

da cui

$$z = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$$

che è accettabile. Dunque questo è il punto cercato che soddisfa la tesi del Teorema di Lagrange.

✎ **Esercizio 6.7.20.** *Determinate quante soluzioni reali ha l'equazione $x^3 - 2x + 5 = k$ al variare di k parametro reale.*

Sia $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Andiamo a studiare qualitativamente la funzione f . Si ha $f(0) = 5$; poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 2$ che si annulla in $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ dunque

$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ punto di massimo locale} \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ punto di minimo locale.}$$

Infine

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =: r_1 > f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) =: r_2 > 0$$

quindi riassumendo:

per $k > r_1$ abbiamo 1 soluzione;

per $k = r_1$ abbiamo 2 soluzioni;

per $r_2 < k < r_1$ abbiamo 3 soluzioni;

per $k = r_2$ abbiamo 2 soluzioni;

per $k < r_2$ abbiamo 1 soluzione.

✎ **Esercizio 6.7.21.** *Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$ l'equazione*

$$e^x = x^2 - 2x + k$$

ha almeno una soluzione. È possibile dimostrare che essa ha esattamente una soluzione per ogni k ?

Ponendo

$$f(x) = e^x - x^2 + 2x$$

si osserva che f è continua e derivabile su tutto \mathbb{R} ;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

quindi la funzione ammettendo limiti infiniti (con segno opposto) ai due estremi dell'intervallo, ed essendo continua, significa che ha sempre almeno uno zero; per vederlo, basta osservare che dai limiti proposti, f è definitivamente negativa per $x \rightarrow -\infty$ e definitivamente positiva per $x \rightarrow +\infty$; quindi esiste un intervallo (che per semplicità possiamo considerare simmetrico) del tipo $[-M, M]$ tale che $f(-M) < 0$ e $f(M) > 0$, quindi applicando il teorema degli zeri si dimostra che l'equazione proposta ha almeno una soluzione.

Per vedere se tale soluzione è unica, al variare del parametro k , bisognerebbe dimostrare che f è strettamente crescente su \mathbb{R} . Infatti in tal caso i valori del codominio sono raggiunti tutti una e una sola volta.

Allora si ha

$$f'(x) = e^x - 2x + 2 \quad f''(x) = e^x - 2 \quad f'''(x) = e^x > 0$$

dal test di monotonia si ha che f'' è una funzione strettamente crescente. Visto che $f''(x) = 0$ per $x = \log 2$ e si annulla solo in quel punto, significa che (essendo strettamente crescente) prima è negativa e poi è positiva. Quindi la funzione f' prima è decrescente, poi è crescente e ammette un minimo (locale e globale!) corrispondente a $x = \log 2$. A questo punto, due sono le possibilità: il valore minimo di f' è sempre maggiore di zero, allora tutta f' è strettamente positiva, oppure il minimo di f' è negativo. Ma

$$f'(\log 2) = 4 - 2 \log 2 > 0$$

quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e dunque di nuovo dal test di monotonia anche la funzione f è strettamente crescente (che è quanto volevamo dimostrare).

6.8. Relazioni tra continuità e derivabilità: esempi e controesempi

f derivabile $\Rightarrow f$ continua.

Vero. Vedi il Teorema 6.3.1.

f continua $\Rightarrow f$ derivabile.

Falso. Controesempio: $f(x) = |x|$.

f continua $\Rightarrow |f|$ continua.

Vero. Infatti dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

da cui basta passare al limite per $x \rightarrow x_0$.

$|f|$ continua $\Rightarrow f$ continua.

Falso. Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f derivabile $\Rightarrow |f|$ derivabile.

Falso. Controesempio: $f(x) = x$.

$|f|$ derivabile $\Rightarrow f$ derivabile.

Falso. Controesempio:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f continua $\Rightarrow f$ ha massimo e minimo.

Falso. Controesempio: $f(x) = x^2$.

f limitata $\Rightarrow f$ ha massimo e minimo.

Falso. Controesempio: $f(x) = \arctan x$.

f limitata $\Rightarrow f$ ha limite agli estremi del dominio.

Falso. Controesempio: $f(x) = \sin x$.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty?$$

Falso. Controesempio: $f(x) = e^{-x}$.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty?$$

Falso. Controesempio: $f(x) = e^x$.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{non ha punti di minimo in } \mathbb{R}?$$

Falso. Controesempio: $f(x) = x^2$.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{non ha punti di massimo in } \mathbb{R}?$$

Vero. Infatti se f avesse un punto di massimo locale, in un intorno si dovrebbe avere $f''(x) < 0$.

6.9. Il Teorema di De l'Hospital

Una notevole applicazione del calcolo differenziale è costituita dal Teorema di De l'Hospital, che permette di dare una risposta a molti casi di limiti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Teorema 6.9.1. (TEOREMA DI DE L'HOSPITAL) *Siano f e g funzioni derivabili in un intervallo (a, b) , con $g, g' \neq 0$ in (a, b) . Se*


$$(i) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm \infty$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

☞ **Osservazione 6.9.2.** Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure $x \rightarrow b^-$ e $b \leq +\infty$

 **Esempio 6.9.3.** Un tipico esempio di applicazione del Teorema di De l'Hospital è per la dimostrazione della gerarchia degli infiniti. Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \quad \alpha, \beta > 0.$$

Prima di tutto facciamo vedere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\gamma x}} = 0 \quad \gamma > 0.$$


Usando il Teorema di De l'Hospital con le scelte $f(x) = x$, $g(x) = e^{\gamma x}$ si ha che l'ipotesi (i) è verificata, e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\gamma e^{\gamma x}} = 0,$$

quindi anche il precedente limite fa zero. A questo punto allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\beta/\alpha x}} \right)^\alpha = 0$$

dal punto precedente.


 **Esercizio 6.9.4.** Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

Il limite proposto si pone nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$. Si vede chiaramente che usare il fatto che $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$ non è sufficiente per superare la forma di indecisione. Applicando il Teorema di De l'Hospital (si verifica che le ipotesi sono soddisfatte) si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

e dunque anche il limite proposto esiste e vale $-1/6$.

 **Osservazione 6.9.5.** Il Teorema di De l'Hospital, anche se usato correttamente, a volte può complicare le situazioni anziché semplificarle. Per esempio il seguente caso (che si presenta in una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

mentre con un semplice cambio di variabile, ponendo $t = 1/x^2$ si riconduce il limite al caso della gerarchia degli infiniti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$$

☞ **Osservazione 6.9.6.** 1) Il Teorema di De l'Hospital si usa per quozienti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, non per prodotti (a meno che non si presentino nella forma di indecisione $[0 \cdot \infty]$).

2) Il Teorema di De l'Hospital si usa per quozienti che siano *reali forme di indecisione*

3) Il Teorema prescrive di calcolare il *quoziente delle derivate* NON *la derivata del quoziente!*

4) Se il limite del quoziente delle derivate non esiste il Teorema di De l'Hospital NON si applica e NULLA si può dire riguardo al limite di partenza, che pertanto può tranquillamente esistere. Quindi in particolare NON è lecito concludere che anche il limite di partenza non esiste, come mostra il seguente esempio.

✎ **Esempio 6.9.7.** *Il limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma si vede immediatamente che

$$\frac{x - \sin x}{x + \sin x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

invece volendo utilizzare il Teorema di De l'Hospital si avrebbe che il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

non esiste.

6.10. Derivate seconde e funzioni convesse

Abbiamo visto che il significato geometrico della derivata prima è quello di coefficiente angolare della retta tangente nel punto in cui viene calcolata e quindi la derivata prima dà informazioni sulla "pendenza" del grafico.

Vedremo ora che la derivata seconda che rappresenta la *velocità di variazione di tale pendenza* misura il grado di scostamento dall'andamento rettilineo, quindi dà una misura della CONCAVITÀ O CONVESSITÀ di una funzione.

Premettiamo alcune definizioni.

□ **Definizione 6.10.1.** Una figura F si dice CONVESSA se per ogni $P_1, P_2 \in F$, tutto il segmento congiungente i due punti è tutto contenuto in F .

□ **Definizione 6.10.2.** Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Si chiama EPIGRAFICO di f l'insieme

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}.$$

Si dice che f è CONVESSA se il suo epigrafico è un insieme convesso. Si dice che f è CONCAVA se $-f$ è convessa.

Si dimostra che la definizione precedente è equivalente alla seguente.

□ **Definizione 6.10.3.** Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora si dice che f è CONVESSA (rispettivamente CONCAVA) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (rispettivamente sopra) il grafico di f .

Alternativamente questa ultima condizione si scrive

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad t \in [0, 1]$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che f è STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA).

☞ **Osservazione 6.10.4.** 1) f convessa non implica f continua. Controesempio: $f(x) = x^2$ per $x \in (-1, 1)$ e $f(x) = 2$ per $x = \pm 1$.

2) f continua non implica f convessa. Controesempio: $f(x) = -|x|$

3) f convessa non implica f derivabile. Controesempio: $f(x) = |x|$.

Tuttavia vale il seguente teorema.

Teorema 6.10.5. *Una funzione convessa (o concava) su un intervallo I è continua in I salvo al più negli estremi dell'intervallo. Inoltre possiede derivata destra e sinistra in ogni punto interno dell'intervallo.*

Dunque i *punti angolosi* e i *punti di discontinuità agli estremi* sono i soli comportamenti irregolari permessi ad una funzione concava o convessa. D'altra parte, se f è derivabile allora la convessità risulta avere relazioni interessanti con le derivate prime e seconde.

Teorema 6.10.6. *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.*

(i) *Se f è derivabile in (a, b) allora f convessa (concava) in (a, b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a, b)*

(ii) *Se f è derivabile due volte in (a, b) , allora f convessa (concava) in (a, b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) per ogni $x \in (a, b)$*

Conseguenza: lo studio della derivata seconda ci permette di decidere riguardo la convessità

o la concavità di una funzione. Per esempio: $f(x) = e^x$ è una funzione convessa su tutto l'asse reale.

Un'altra caratterizzazione geometrica della convessità coinvolge le rette tangenti.

Teorema 6.10.7. *Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) è convessa (concava) in (a, b) se e solo se per ogni $x_0 \in (a, b)$ il grafico di f si mantiene in (a, b) tutto SOPRA (SOTTO) il grafico della sua retta tangente in x_0 .*

Ovviamente il verso della concavità può cambiare.

□ **Definizione 6.10.8.** Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità o un punto per cui $f'(x_0) = \pm\infty$. Allora x_0 si dice PUNTO DI FLESSO per f se esiste un intorno destro di x_0 , per esempio del tipo $(x_0, x_0 + h)$ con $h > 0$ in cui f è convessa e un intorno sinistro di x_0 , per esempio del tipo $(x_0 - h, x_0)$, $h > 0$ in cui f è concava; e/o viceversa.

Significato geometrico del flesso: attraversa la propria retta tangente.

Teorema 6.10.9. *Sia x_0 un punto di flesso per f ; se esiste $f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$.*

Ad esempio $f(x) = x^3$; la sua derivata si annulla in $x = 0$ che è un punto di flesso.

D'altra parte, si può avere un punto di flesso senza necessariamente avere l'esistenza della derivata seconda in quel punto, come mostra il seguente controesempio.

✎ **Esempio 6.10.10.** Sia $f(x) = x|x|$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Allora per $x > 0$ $f(x) = x^2$ e quindi è una funzione convessa, per $x < 0$ $f(x) = -x^2$ e quindi è una funzione concava; perciò $x = 0$ è un punto di flesso perché attraverso $x = 0$ la funzione cambia la propria concavità. D'altra parte si vede facilmente che

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -2x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

dove l'ultimo punto è stato verificato dalla definizione di limite di rapporto incrementale. A questo punto

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

e quindi sempre usando la definizione di limite del rapporto incrementale si vede immediatamente che $f''(0)$ non esiste.

6.11. Studio del grafico di una funzione

Riassumiamo dunque i punti fondamentali da verificare quando ci si trova di fronte al problema di studiare il grafico di una funzione e poi facciamo alcuni esempi.

1) Per prima cosa è essenziale determinare il **dominio di f** , cioè il più grande insieme naturale in cui la funzione risulta definito. Talvolta risulta particolarmente utile barrare con un segno grafico le parti del piano dove di sicuro si sa non ci sarà grafico della funzione.

2) In seguito è importante vedere se la funzione presenta **simmetrie**, per esempio se f è pari o dispari. Nel caso ad esempio f sia pari, si può restringere lo studio del grafico alla regione $x \geq 0$ e disegnare la parte restante del grafico per simmetria.

3) Se la funzione è **periodica** allora si può restringere lo studio del suo grafico a un periodo fissato.

4) Quando possibile e/o non particolarmente complicato può essere utile avere informazioni sugli **zeri** della funzione e sul suo **segno**.

5) A questo punto, dopo questa prima analisi, diventa essenziale studiare i **limiti** della f agli estremi del dominio, ricercando eventuali asintoti orizzontali oppure verticali. Importante può essere individuare eventuali punti di **discontinuità** della funzione.

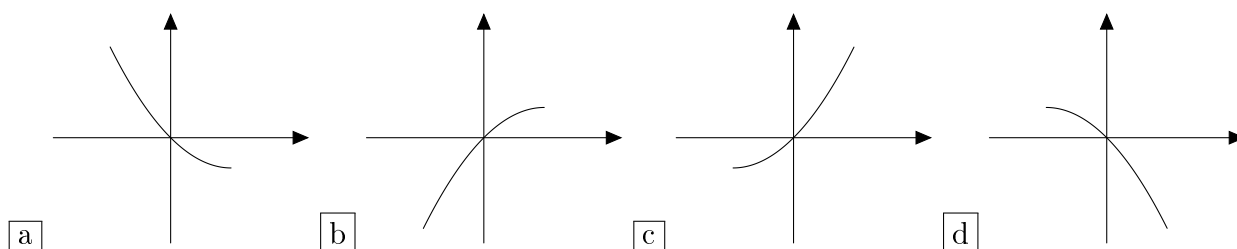
6) Se $f(x) \rightarrow \pm\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$ (o equivalentemente per $x \rightarrow \mp\infty$) allora è possibile cercare (se esiste) l'**asintoto obliquo**.

7) A questo punto si calcola la **derivata** della f nei punti in cui $f'(x)$ esiste. È importante studiare accuratamente i punti in cui f risulta continua ma non derivabile, per stabilirne la natura (punti angolosi, punti di flesso a tangente verticale, cuspidi...). Nei punti angolosi o agli estremi del dominio può essere utile calcolare le **derivate destre e sinistre** di f (per valutare l'eventuale pendenza del grafico).

8) Successivamente si studia il **segno di $f'(x)$** che dà informazioni sulla monotonia di f e sugli eventuali punti di massimo o minimo.

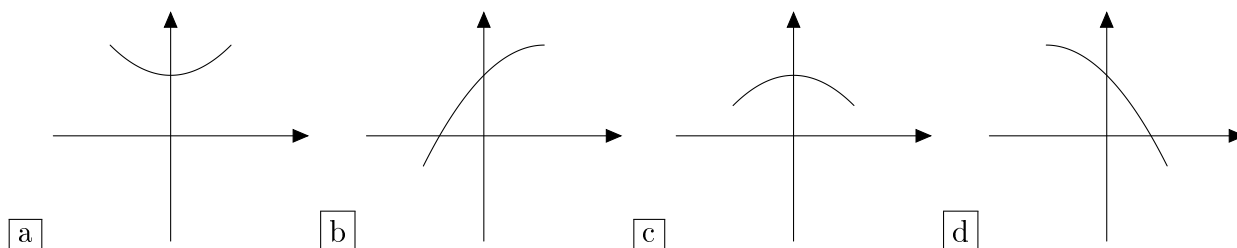
9) Per concludere, nei casi in cui i calcoli non sono troppo complicati, è utile studiare la **derivata seconda** e il suo segno. Questo dà informazioni sulla concavità o sulla convessità della f .

♣ **Esercizio 6.11.1.** Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = -3$. Allora il grafico qualitativo di f vicino all'origine è:



Tutti e quattro i grafici verificano $f(0) = 0$, quindi saranno le informazioni sulla derivata prima e seconda a indicare la giusta scelta. Si ha che $f'(0) = 1 > 0$ quindi localmente vicino all'origine la funzione è crescente. Questo comporta l'esclusione dei grafici a) e d). Inoltre $f''(0) = -3 < 0$ quindi localmente vicino all'origine f ha concavità verso il basso, cioè è concava; questo esclude il grafico c) che è il grafico di una funzione localmente convessa. La risposta esatta è pertanto la b).

✎ **Esercizio 6.11.2.** Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$. Allora il grafico qualitativo di $g(x) = e^{-f(x)}$ vicino all'origine è:



Tutti e quattro i grafici verificano $g(0) = e^{-f(0)} = 1$, quindi saranno le informazioni sulla derivata prima e seconda a indicare la giusta scelta. Si ha che $f'(0) = 0$ quindi $g'(x) = e^{-f(x)}(-f'(x))$ da cui $g'(0) = 0$ quindi localmente vicino all'origine la funzione ha tangente orizzontale. Questo comporta l'esclusione dei grafici b) e d). Inoltre $f''(0) > 0$ quindi si ha

$$g''(x) = e^{-f(x)}(-f'(x))^2 + e^{-f(x)}(-f''(x)) \quad \text{da cui} \quad g''(0) = -f''(0) < 0$$

quindi localmente vicino all'origine g ha concavità verso il basso, cioè è concava; questo esclude il grafico a) che è il grafico di una funzione localmente convessa. La risposta esatta è pertanto la c).

✎ **Esercizio 6.11.3.** Studiare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = 2 \arctan x - x$$

Il dominio della funzione è \mathbb{R} . Si osserva che f è dispari perché differenza di funzioni dispari e che $f(0) = 0$. Calcolando i limiti agli estremi del dominio si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

Quindi è possibile tentare di ricercare l'asintoto obliquo. Sia $x \rightarrow \pm\infty$. Se esiste l'asintoto obliquo ha la forma $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \frac{\arctan x}{x} - 1 = -1$$

e

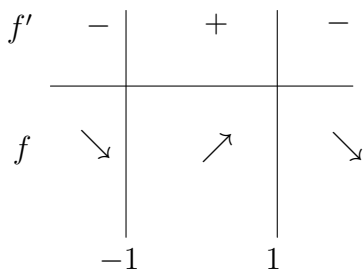
$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \arctan x = \pm\pi.$$

Quindi esiste l'asintoto obliquo sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$ e valgono rispettivamente $y = -x + \pi$ e $y = -x - \pi$.

D'altra parte

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; inoltre si ha



quindi si vede immediatamente che $x = 1$ è punto di massimo locale per f e $x = -1$ è punto di minimo locale per f . Calcoliamo per completezza i valori del massimo e del minimo: si ha $f(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2} \mp 1$.

Infine calcoliamo la funzione derivata seconda

$$f''(x) = 2 \left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right]$$

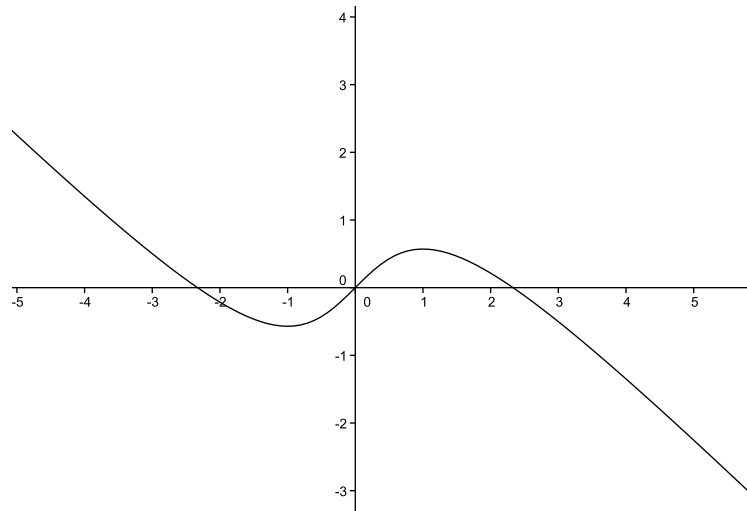
quindi è immediato verificare che $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e viceversa. La funzione data è dunque concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$. Il grafico qualitativo è illustrato in figura.

✎ **Esercizio 6.11.4.** Studiare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

Il dominio della funzione è

$$\frac{x^3}{x-1} \geq 0$$



che è equivalente a $x \leq 0 \vee x > 1$. Si nota che quando esiste la funzione è sempre non negativa. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha (dalla gerarchia degli infiniti unito al fatto che la funzione radice quadrata è continua quindi preserva il limite)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

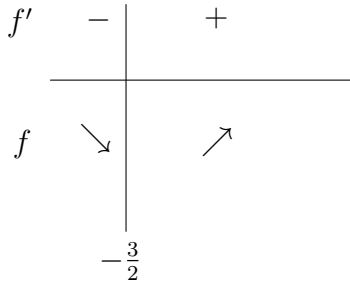
A questo punto calcoliamo la funzione derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}} \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}.$$

Si noti che visto che la funzione radice quadrata è crescente, il segno della derivata prima coincide con il segno della derivata dell'argomento della radice. Si ha inoltre

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}.$$

Inoltre si ha



quindi $x = 0$ è punto di minimo locale e anche $x = 3/2$ è punto di minimo locale. Si ha $f(0) = 0$ (quindi $x = 0$ è anche punto di minimo globale) mentre $f(3/2) = 3\sqrt{3}/2$.

Tralasciamo per semplicità lo studio della derivata seconda. Invece andiamo a cercare, se esistono, gli asintoti obliqui per la funzione. Prima di tutto sia $x \rightarrow +\infty$. Allora l'asintoto obliquo se esiste deve essere della forma $y = mx + q$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 1$$

mentre

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} + x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

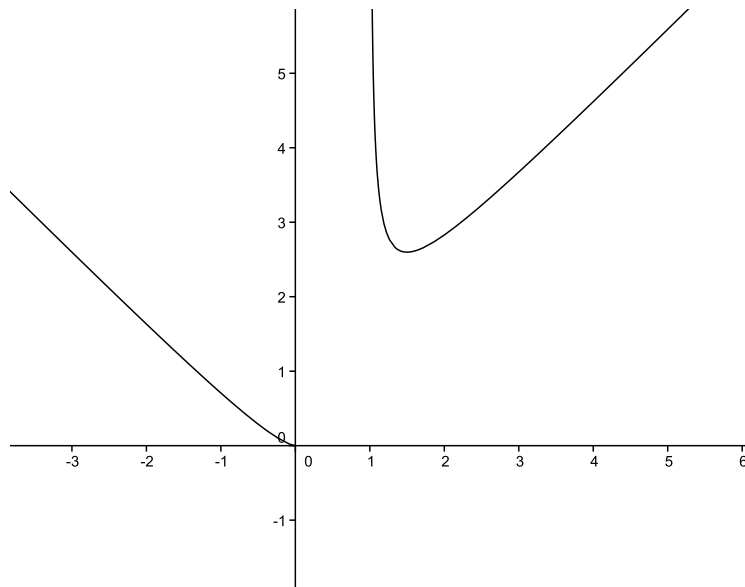
Quindi per $x \rightarrow +\infty$ esiste l'asintoto obliquo e vale $y = x + \frac{1}{2}$. Allo stesso modo si dimostra che per $x \rightarrow -\infty$ esiste l'asintoto obliquo della forma $y = \bar{m}x + \bar{q}$ con

$$\bar{m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1$$

e

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} \frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x}{x-1}} - x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il grafico qualitativo è illustrato in figura.



✎ **Esercizio 6.11.5.** *Studiare il grafico qualitativo della funzione*

$$f(x) = \log |4 - x| + \frac{2}{|x - 4|}$$

Innanzitutto osserviamo che essendo $|x| = |-x|$ la funzione data si può riscrivere come

$$f(x) = \log |x - 4| + \frac{2}{|x - 4|}$$

che è ben definita per $x \neq 4$. A questo punto, facendo un cambio di variabile $t = x - 4$ lo studio del grafico della funzione proposta è equivalente allo studio del grafico qualitativo della seguente funzione

$$g(t) = \log |t| + \frac{2}{|t|}$$

che è una funzione pari, quindi è sufficiente studiarla per $t > 0$. Si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \log t + \frac{2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \log t \left[1 + \frac{2}{t \log t} \right] = +\infty$$

visto che $\lim_{t \rightarrow 0^-} t \log t = 0^-$ e quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{t \log t} = -\infty.$$

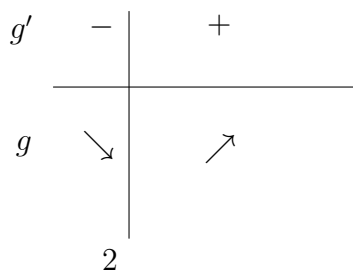
D'altra parte si vede facilmente che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty.$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha

$$g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} = \frac{t-2}{t^2}$$

quindi visto che si ha



allora $x = 2$ è punto di minimo locale (e conseguentemente visto che la funzione è pari anche $x = -2$ lo sarà). Infine dallo studio della derivata seconda si ottiene

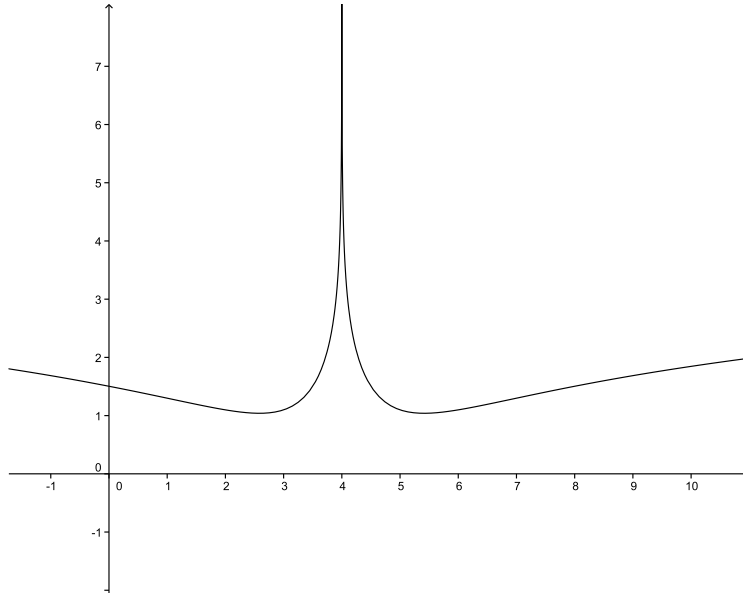
$$g''(t) = \frac{t^2 - 2t(t-2)}{t^4} = \frac{4-t}{t^3}$$

quindi in $t = 4$ c'è un cambio di concavità. Il grafico qualitativo della funzione originaria si ottiene attraverso una opportuna traslazione degli assi, come mostrato in figura.

6.12. Approssimazione lineare e formula di Taylor

6.12.1. Linearizzazione e approssimazione del primo ordine

Un'operazione frequente in matematica è la LINEARIZZAZIONE: linearizzare significa approssimare una quantità che dipende in modo NON lineare dalle sue variabili con una che dipende



linearmente da esse; l'importante è poi avere un'informazione sull'errore commesso. Un esempio tipico è quello di approssimare l'incremento della f sulla base dell'incremento sulla variabile indipendente.

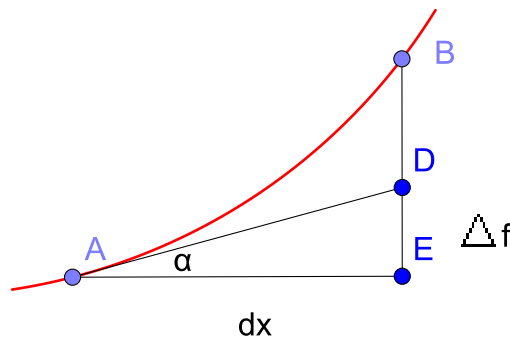
Consideriamo la figura. Supponiamo di essere partiti dal punto A di ascissa x_0 e di aver dato un incremento dx fino ad arrivare al punto E che avrà ascissa $x_0 + dx$. L'incremento corrispondente sulle ordinate sarà

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

D'altra parte, dal significato geometrico della derivata si ha che

$$DE = df = \tan \alpha \, dx = f'(x_0) \, dx$$

quindi se dx è una quantità "piccola" si può approssimare la quantità Δf (il segmento BE) con



la quantità df (il segmento DE). La quantità

$$df(x_0) = f'(x_0) dx$$

prende il nome di DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0 . Ci chiediamo qual è l'errore commesso nel fare tale approssimazione; detto altrimenti: cosa si può dire della differenza tra Δf e df ? Si ha (dalla definizione di derivata)

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

da cui

$$\frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0) + \varepsilon(dx)$$

dove $\varepsilon(dx) \rightarrow 0$ se $dx \rightarrow 0$ (cioè $\varepsilon(dx)$ è infinitesimo per $dx \rightarrow 0$). Quindi

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0) dx + dx \varepsilon(dx).$$

A questo punto il primo membro è pari all'incremento Δf sulle ordinate mentre la prima quantità dopo l'uguale è uguale al differenziale di f nel punto x_0 quindi la relazione precedente può essere riscritta come

$$\Delta f - df(x_0) = dx \varepsilon(dx).$$

Il secondo membro della precedente uguaglianza è una quantità che divisa per dx tende a zero se $dx \rightarrow 0$, quindi è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a dx . Occorre quindi definire un nuovo simbolo.

□ **Definizione 6.12.1.** *Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0 , si dice che*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(e si legge che f è “o piccolo” di g per $x \rightarrow x_0$) se accade che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

✎ **Esempio 6.12.2.** *Si ha che*

$$x^2 = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

infatti

$$\frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Si ha anche che

$$e^{-1/x^2} = o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

infatti dalla gerarchia degli infiniti dopo un cambio di variabile si ottiene che

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^4} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Invece

$$\sin x \neq o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

infatti si ha (dai limiti notevoli) che

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

☞ **Osservazione 6.12.3.** *Attenzione: la proprietà di una funzione di essere “o piccolo” di un'altra funzione è una proprietà locale cioè dipende fortemente da dove si fa il limite (che va sempre specificato!). Infatti si ha che*

$$\sin x = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

infatti dal teorema del confronto

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

perché $\sin x$ è una quantità limitata mentre $1/x$ è una quantità infinitesima. Invece dall'esempio precedente abbiamo visto che

$$\sin x \neq o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

☞ **Osservazione 6.12.4.** $o(1)$ è semplicemente una quantità infinitesima, indipendentemente da dove si fa il limite, perché dalla definizione si ha che

$$\frac{o(1)}{1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

qualunque sia x_0 .

Ritornando al nostro problema di approssimazione, siamo riusciti a stabilire la seguente relazione di APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE (perché il differenziale è un'applicazione lineare)

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(dx) \quad \text{per } dx \rightarrow 0$$

cioè l'errore che si commette approssimando l'incremento sulle ordinate di una funzione (dopo aver dato un incremento dx sulle ascisse a partire dal punto x_0) con il differenziale calcolato in quel punto è un infinitesimo di ordine superiore all'incremento stesso.

☞ **Osservazione 6.12.5.** Come si accennava, il differenziale calcolato in un punto è un'applicazione lineare

$$df(x_0) : dx \mapsto f'(x_0) dx$$

che ad ogni incremento dx associa l'incremento stesso moltiplicato per il valore della derivata prima di f calcolata in x_0 (che quindi è un numero). È per questo che si parla di APPROSSIMAZIONE DEL PRIMO ORDINE.

Il differenziale si comporta in modo simile alla derivata nei confronti della somma e del prodotto; più nel dettaglio si ha che

$$\begin{aligned}d(f \pm g) &= df \pm dg \\d(fg) &= g df + f dg \\d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g df - f dg}{g^2}\end{aligned}$$

6.12.2. Relazione tra “o piccolo” e “asintotico”

Abbiamo visto che il processo di linearizzazione permette di approssimare una funzione derivabile, almeno localmente, mediante la sua retta tangente; si tratta quindi di una approssimazione lineare. D'altra parte nel corso dei nostri studi abbiamo già visto altri processi di approssimazione; per esempio quando abbiamo stabilito che due funzioni sono asintotiche se il limite del quoziente è 1; questo significa che le due funzioni almeno localmente si comportano allo stesso modo. Ad esempio dal processo di linearizzazione si ha

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$


mentre dai limiti notevoli si ha che

$$\sin x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Si può dimostrare che queste affermazioni sono in realtà equivalenti. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 6.12.6. *Vale la seguente equivalenza: per $x \rightarrow x_0$*

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

 **Esempio 6.12.7.** *Si ha per $x \rightarrow 0$*

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi in questo caso l'approssimazione non è più lineare ma quadratica (c'è il termine di secondo grado). Questo suggerisce l'idea di generalizzare il processo di approssimazione, come mostra il paragrafo seguente.

6.12.3. Approssimazione polinomiale: polinomio e formula di Taylor e di Mac Laurin

Abbiamo visto dall'ultimo esempio che è possibile pensare di generalizzare il processo di "approssimazione per linearizzazione" fino ad arrivare a una "approssimazione polinomiale". Più in generale la domanda che ci poniamo è la seguente: data una funzione derivabile quanto vogliamo, esiste un polinomio che nell'intorno di un punto fissato approssima la funzione meglio della retta tangente? La risposta è data dai prossimi teoremi.

Teorema 6.12.8. (POLINOMIO DI MAC LAURIN) *Data una funzione f derivabile n volte in $x = 0$ esiste uno e un solo polinomio di grado minore o uguale a n , chiamiamolo T_n con la proprietà che*

$$T_n(0) = f(0) \quad T_n'(0) = f'(0) \quad T_n''(0) = f''(0) \quad \dots \quad T_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

e questo polinomio, detto POLINOMIO DI MAC LAURIN di $f(x)$ di grado n è dato da

$$T_n(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2} x^2 f''(0) + \frac{1}{3!} x^3 f'''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

☞ **Osservazione 6.12.9.** Si osservi che il polinomio $T_n(x)$ ha grado n a meno che $f^{(n)}(0) = 0$; in tal caso avrà grado minore di n .

Quindi abbiamo trovato un polinomio candidato. Ora mostriamo che tale polinomio approssima bene la funzione f in un intorno di $x = 0$. Precisamente vale il seguente teorema.

Teorema 6.12.10. (FORMULA DI MAC LAURIN ALL'ORDINE n CON RESTO SECONDO PEANO) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $0 \in (a, b)$. Allora*

$$f(x) = T_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Il teorema precedente si può riassumere dicendo che la funzione da approssimare è uguale al polinomio approssimante più l'errore di approssimazione che è un infinitesimo di ordine superiore a x^n . La quantità $o(x^n)$ si dice RESTO SECONDO PEANO e se $x \rightarrow 0$ il resto secondo Peano è tanto più piccolo quanto maggiore è n .

Tutto questo discorso si può generalizzare a un punto qualunque $x_0 \neq 0$. Si ha infatti il seguente

Teorema 6.12.11. (POLINOMIO DI TAYLOR) *Data una funzione f derivabile n volte in $x = x_0$ esiste uno e un solo polinomio di grado minore o uguale a n , chiamiamolo T_{n,x_0} con la proprietà che*

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0) \quad T'_{n,x_0}(x_0) = f'(x_0) \quad T''_{n,x_0}(x_0) = f''(x_0) \quad \dots \quad T^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

e questo polinomio, detto POLINOMIO DI TAYLOR di $f(x)$ di grado n è dato da

$$\begin{aligned} T_{n,x_0}(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 f'''(x_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Vale poi un risultato analogo di approssimazione.

Teorema 6.12.12. (FORMULA DI TAYLOR ALL'ORDINE n CON RESTO SECONDO PEANO) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x - x_0)^n \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Si hanno i seguenti esempi fondamentali:

 **Esempio 6.12.13.**

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
 \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)
 \end{aligned}$$

6.12.4. Algebra degli “o piccoli”

Elenchiamo qui di seguito le principali proprietà degli “o piccoli” per $x \rightarrow 0$ con relativa dimostrazione. Qui α e β sono reali positivi. Ricordiamo che $o(\cdot)$ non è una funzione ma una classe di funzioni con la proprietà espressa dalla definizione.

$$ko(x^\alpha) = o(x^\alpha), \quad k \in \mathbb{R}$$

Sia $f = ko(x^\alpha)$. Allora $f/k = o(x^\alpha)$ cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{k x^\alpha} = 0. \quad (6.12.1)$$

Devo dimostrare che $f = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{k x^\alpha} k \stackrel{(6.12.1)}{=} 0.$$

$$o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^\alpha)$. Questo significa che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0 \quad (6.12.2)$$

Devo dimostrare che $f + g = o(x^\alpha)$. Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{g(x)}{x^\alpha} \stackrel{(6.12.2)}{=} 0.$$

In particolare da questa proprietà si deduce che $o(x) + o(x) = o(x)$ e ovviamente anche $o(x) - o(x) = o(x)$ e non zero!

$$o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^{\alpha+\beta})$. Questo significa che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = 0 \quad (6.12.3)$$

Devo dimostrare che $f + g = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} + \frac{g(x)}{x^\alpha x^\beta} x^\beta \stackrel{(6.12.3)}{=} 0.$$

Questa proprietà si esprime dicendo che “contano” gli errori con potenze piccole (per $x \rightarrow 0$ naturalmente) e che l’errore più “grossolano” ingloba quello più fine.

$$x^\alpha o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Sia $f = o(x^\beta)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\beta} = 0. \quad (6.12.4)$$

Devo dimostrare che $x^\alpha f = o(x^{\alpha+\beta})$. Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha f(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\beta} \stackrel{(6.12.4)}{=} 0.$$

$$o(x^\alpha) o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

Sia $f = o(x^\alpha)$ e $g = o(x^\beta)$. Questo significa che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^\beta} = 0 \quad (6.12.5)$$

Devo dimostrare che $fg = o(x^{\alpha+\beta})$. Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} \frac{g(x)}{x^\beta} \stackrel{(6.12.5)}{=} 0.$$

$$\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)$$

Sia $f = o(x^{\alpha+\beta})$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\beta}} = 0. \quad (6.12.6)$$

Devo dimostrare che $f/x^\beta = o(x^\alpha)$. Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\beta x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\beta}} \stackrel{(6.12.6)}{=} 0.$$

6.12.5. Formula di Taylor con resto secondo Lagrange e stima dell'errore

Vale il seguente teorema.

Teorema 6.12.14. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO LAGRANGE) *Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora esiste c compreso tra x_0 e x tale che*

$$f(x) = T_{n, x_0}(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

La quantità

$$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

si chiama RESTO SECONDO LAGRANGE e può servire per dare una stima dell'errore di approssimazione, come mostra l'esempio seguente.

✎ **Esempio 6.12.15.** *Si chiede di stimare $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ con un errore inferiore a 10^{-3} .*

Pensiamo innanzitutto di usare lo sviluppo di $\log(1+x)$ centrato nell'origine e di considerare poi $x = 1/2$. L'obiettivo è quello di capire a quale ordine arrestare lo sviluppo di Mac Laurin in modo tale che l'errore (resto di Lagrange) sia inferiore a 10^{-3} . A tal proposito scriviamo lo sviluppo richiesto. Si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(z)$$

con $0 < z < x = 1/2$ e

$$R_n(z) = (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Andiamo quindi a determinare esplicitamente questo resto. Innanzitutto si ha

$$f(x) = \log(1+x) \quad f'(x) = (1+x)^{-1} \quad f''(x) = -(1+x)^{-2} \quad f'''(x) = 2(1+x)^{-3} \quad f^{iv}(x) = -6(1+x)^{-4}$$

da cui per induzione è possibile provare che

$$f^{n+1}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-n}$$

quindi il resto di Lagrange del nostro sviluppo sarà

$$R_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{1+z} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

Visto poi che $0 < z < 1/2$ allora $\left(\frac{1}{1+z} \right)^{n+1} < 1$ quindi basta chiedersi per quale n si abbia

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{10^3}.$$

Visto che $10^3 \approx 2^{10}$ e tenendo conto del fattore $n+1$, ci si aspetta che $n=7$ sia il valore richiesto e infatti per $n=6$ si ha

$$\frac{1}{2^7 \cdot 7} = \frac{1}{896} > \frac{1}{1000}$$

mentre per $n=7$ si ha

$$\frac{1}{2^8 \cdot 8} = \frac{1}{2048} < \frac{1}{1000}$$

Quindi lo sviluppo richiesto sarà

$$\log \frac{3}{2} \approx 0,405465 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} \approx 0,4058036$$

6.12.6. Polinomio di Taylor e approssimazione: un esempio significativo

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Si vede che questa funzione è continua e si nota che è pure derivabile (per verificare la derivabilità in $x=0$ si usa la definizione di limite del rapporto incrementale) e la sua derivata è data da

$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

A sua volta è facile verificare che anche questa funzione è continua e derivabile e la sua derivata è

$$f''(x) = \begin{cases} (-2x^{-3} + x^{-4}) e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

che è di nuovo continua e derivabile. Per induzione si fa vedere che la funzione di partenza è di classe C^∞ quindi è derivabile infinite volte e tutte le sue derivate sono funzioni continue; la derivata k -esima vale

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(x^{-1}) e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

dove P_k è un polinomio in x^{-1} di grado $2k$. D'altra parte, si vede facilmente che tutte le derivate in zero valgono zero, quindi il polinomio di Taylor è zero! Ma chiaramente la funzione è diversa da zero, quindi in questo caso *il polinomio di Taylor non rappresenta una buona approssimazione della funzione*.

6.12.7. Esercizi proposti

✎ **Esercizio 6.12.16.** Dire se le seguenti sono vere o false:

$$(i) \cos x - 1 = o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$(ii) \cos x = o(x) \quad x \rightarrow +\infty$$

$$(iii) e^x - 1 = o(\sqrt{x}) \quad x \rightarrow 0$$

(i) Falsa. Infatti dai limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

(ii) Vera. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

dal teorema del confronto.

(iii) Vera. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = 0.$$

✎ **Esercizio 6.12.17.** Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin arrestato a $n = 3$ per la funzione $f(x) = \log(1 + 3x)$.

Si ha

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

quindi sostituendo $z = 3x$ (si noti che se $x \rightarrow 0$ anche $z \rightarrow 0$ e viceversa) si ha immediatamente

$$\log(1 + 3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)$$

✎ **Esercizio 6.12.18.** Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin arrestato all'ordine $n = 12$ della funzione

$$f(x) = e^{x^3} - 1 - \sin(x^3)$$

L'idea è quella di procedere come prima, scrivendo il generico sviluppo di Mac Laurin per l'esponenziale e per il seno e arretandoli in maniera opportuna, dopo aver sostituito $z = x^3$. A tal fine, per l'esponenziale basta arretarsi all'ordine 4 mentre per il seno (visto che la derivata quarta calcolata in 0 fa 0) basta arretarsi all'ordine 3; l'importante è però per il seno indicare il giusto errore (che sarà $o(x^4)$ e non $o(x^3)$ che è troppo poco, in quanto si congloberebbe tutti i termini di grado superiore).

Si ha dunque

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^3} - 1 - \sin x^3 \\ &= \left(1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^4}{4!} + o(x^3)^4 - 1 \right) - \left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + o(x^3)^4 \right) \end{aligned}$$

da cui semplificando

$$f(x) = \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12})$$

✎ **Esercizio 6.12.19.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x}$$

Il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Primo modo: usando i limiti notevoli

$$e^x - 1 \sim x \quad \log(1 - x) \sim -x \quad \tan x \sim x \quad x \rightarrow 0$$

si ha che

$$\frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x} \sim \frac{0}{0}$$

che non dà informazioni ulteriori. Quindi questo metodo non è applicabile (l'approssimazione al primo ordine non è sufficiente).

Secondo modo: usiamo il teorema di de l'Hospital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \log(1 - x)}{\tan x - x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

che si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0} \right]$; è necessario dunque provare ad applicare di nuovo il teorema. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{2 \cos x \sin x}{\cos^3 x}}$$

che purtroppo si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; è necessario dunque provare ad applicare di nuovo il teorema. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{2 \cos x \sin x}{\cos^3 x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2(1-x)^{-3}}{\frac{2 \cos^2 x + 6 \sin^2 x}{\cos^4 x}} = -\frac{1}{2}$$

quindi finalmente anche il limite di partenza esiste e vale $-1/2$. Riassumendo l'uso del Teorema di de l'Hospital può risultare a volte lungo e laborioso (col rischio di sbagliare qualche calcolo!)

Terzo modo: proviamo a usare gli sviluppi di Taylor. La difficoltà è tentare di arrestare gli sviluppi in modo da avere lo stesso ordine sia al numeratore che al denominatore. Proviamo a fermarci al primo ordine utile dopo il primo (dal primo metodo abbiamo visto che fermarsi al primo ordine non era sufficiente). Visto che si ha

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

proviamo ad arrestarci al terzo ordine anche al numeratore. Si ha

$$e^x - 1 + \log(1-x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1\right) + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

quindi dalle proprietà degli "o piccolo", ricordando che $o(1) \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} = -\frac{1}{2}.$$

✎ **Esercizio 6.12.20.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$$

Usiamo gli sviluppi di Taylor, arrestando il numeratore al quarto ordine, visto il denominatore. Si ha

$$e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2 = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 = \frac{11}{24}x^4 + o(x^4).$$


Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11}{24} + o(1) = \frac{11}{24}.$$

6.13. Complementi

6.13.1. La proprietà di Darboux delle funzioni derivate

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, non è detto che la funzione derivata $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ risulti continua.

 **Esempio 6.13.1.** La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

risulta derivabile in ogni punto (per la derivata in zero occorre calcolare il limite del rapporto incrementale), con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

che, come si vede subito, non è una funzione continua nell'origine (in questo caso i limiti destro e sinistro della derivata non esistono).

Tuttavia, le funzioni derivate $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ hanno in comune con le funzioni continue la proprietà dei valori intermedi (detta anche proprietà di Darboux), che può essere enunciata come segue (si noti che, a differenza del risultato corrispondente per le funzioni continue, in questo caso non si richiede la proprietà di continuità della funzione derivata):

Proposizione 6.13.2. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile e se $f'(a) < k < f'(b)$, allora esiste almeno un punto $x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = k$.*

Corollario 6.13.3. *Se f è una funzione derivabile su un intervallo I allora $f'(I)$ è un intervallo.*

Ci si potrebbe chiedere se la proprietà di Darboux sia caratteristica delle derivate, cioè se ogni funzione che manda intervalli in intervalli sia la derivata di qualche funzione; questo non è vero come segue dal prossimo risultato.

Proposizione 6.13.4. *L'insieme delle funzioni f definite su un certo intervallo I , che hanno la proprietà che per ogni intervallo $J \subset I$ l'immagine $f(J)$ è un intervallo, non è uno spazio vettoriale.*

Controesempio. Basta osservare che per ogni $a \in [-1, 1]$ la funzione

$$f_a(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

verifica questa proprietà ma la differenza $f_1 - f_0$ è la funzione

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

che non ha questa proprietà.

CAPITOLO 7

Serie

7.1. Definizione di serie e prime proprietà

□ **Definizione 7.1.1.** Data una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si chiama **SERIE ASSOCIATA AD $\{a_n\}_n$** , O **SERIE DI TERMINE GENERALE a_n** , la quantità

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Gli elementi a_n si chiamano **TERMINI DELLA SERIE**. La successione

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

si dice **SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI**.

Diremo che la serie è **CONVERGENTE** se la successione delle somme parziali è convergente, mentre diremo che la serie è **DIVERGENTE POSITIVAMENTE** \llbracket **NEGATIVAMENTE** \rrbracket se la successione delle somme parziali ha limite uguale a $+\infty$ \llbracket $-\infty$ \rrbracket . Infine diremo che la serie è **IRREGOLARE** o **INDETERMINATA** se la successione delle somme parziali non ha limite.

Diremo inoltre che due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere se sono entrambe convergenti, entrambe divergenti o entrambe irregolari.

In particolare, se $\{s_n\}_n$ è convergente e $s_n \rightarrow s$ si ha

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

Quindi obiettivo di questo capitolo non è tanto calcolare esattamente il valore di una serie (evento piuttosto raro) ma piuttosto studiarne il carattere, cioè stabilire se essa è convergente,

divergente o irregolare. L'idea è quella di confrontare serie più complicate con serie-campione più semplici a cui faremo riferimento.

☞ **Osservazione 7.1.2.** Le serie sono solo un linguaggio diverso per trattare le successioni: infatti, per ogni successione $\{a_n\}_n$ possiamo considerare la sua serie, e viceversa, data una qualunque successione $\{s_n\}_n$, questa può essere vista come la serie associata ad una successione $\{a_n\}_n$, visto che ponendo

$$a_0 = s_0, \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad n \geq 1,$$

si ha $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Conformemente a quanto convenuto per le successioni, se $\{a_n\}_n$ è definita solo per $n \geq n_0$, anche la successione delle somme parziali sarà definita solo per $n \geq n_0$ come

$$s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$$

e la serie sarà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

☞ **Esempio 7.1.3.** Sia $q \in \mathbb{R}$, e sia $a_n = q^n$. La serie associata a questa successione si chiama **SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q** . Si verifica facilmente che

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n + 1 & \text{se } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} q \geq 1 \Rightarrow \text{diverge a } +\infty \\ |q| < 1 \Rightarrow \text{converge a } \frac{1}{1 - q} \\ q \leq -1 \Rightarrow \text{è irregolare.} \end{cases}$$

☞ **Esempio 7.1.4.** Consideriamo la seguente serie (detta **SERIE DI MENGOLI**)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

associata alla successione

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 0);$$

visto che $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$, si trova facilmente per induzione che

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i = 1 - \frac{1}{n+2},$$

da cui segue che la serie è convergente ed ha per somma 1.

Come già accennato, il fatto di poter calcolare esplicitamente la somma di una serie assegnata è un evento piuttosto raro. Oltre alla serie geometrica e alla serie di Mengoli un altro esempio è dato da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

che è interessante perché ci dice che la somma di infiniti numeri razionali non è razionale.

Tuttavia nella maggior parte dei casi ci si accontenta di stabilire se la serie in questione risulta convergente, divergente oppure indeterminata.

Un primo strumento utile per studiare la convergenza della serie è rappresentato dal seguente teorema, che fornisce una condizione necessaria affinché una serie risulti convergente.

Teorema 7.1.5. *Se $\sum_n a_n$ è una serie convergente, allora il termine generale a_n risulta infinitesimo.*

☞ **Osservazione 7.1.6.** In generale, avere il termine generale infinitesimo, non è una condizione sufficiente a garantire la convergenza della serie; controesempio LA SERIE ARMONICA $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ che, si vedrà più avanti, diverge, pur avendo il termine generale infinitesimo.

Teorema 7.1.7. (CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY) *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di una serie a termini reali $\sum_n a_n$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$*

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

📎 **Esempio 7.1.8.** Si consideri la serie, detta ARMONICA

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Sommiamo i suoi termini di indice n compreso tra due successive potenze di 2: $2^{k-1} < n \leq 2^k$ ($k \geq 1$). Poiché l'ultimo termine è più piccolo degli altri, e il numero dei termini è $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$, si ha:

$$\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

Potendosi prendere k arbitrariamente grande, questa serie non soddisfa la condizione del teorema precedente, perciò non converge. Come si può facilmente vedere (e come mostreremo nell'Esempio 7.2.10), essa diverge a $+\infty$.

☞ **Osservazione 7.1.9.** Consideriamo due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ che soddisfino a questa condizione: esista un intero (relativo) k e un intero naturale \bar{n} tali che si abbia, per ogni $n > \bar{n}$, $a_n = b_{n+k}$. In altre parole, da un certo punto in poi, la prima serie ha il termine generale uguale al termine che nell'altra serie si trova spostato di k posti (con k intero fisso). Si riconosce che la relazione che così si stabilisce fra le due serie gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva. Ad esempio, stanno fra loro in questa relazione una serie qualunque e una che si ottiene da essa sopprimendo un numero finito di termini e lasciando gli altri nello stesso ordine.

Si riconosce allora facilmente che le due serie hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti, o entrambe divergenti a $+\infty$ (o $-\infty$), o entrambe indeterminate. Infatti, posto $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, per $n \geq \bar{n}$ la differenza $s_n - s'_{n+k}$ si mantiene costante; basta verificare che

$$s_{n+1} - s'_{n+1+k} = s_n + a_{n+1} - s'_{n+k} - b_{n+k+1} = s_n - s'_{n+k}.$$

Dunque le successioni $n \mapsto s_n$ e $n \mapsto s'_{n+k}$ hanno lo stesso comportamento al limite; anche le successioni $n \mapsto s_n$ ed $n \mapsto s'_n$ hanno lo stesso comportamento al limite.

Talvolta può risultare utile il seguente risultato.

Teorema 7.1.10. *Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sia una serie convergente. Allora per ogni n risulta convergente anche la serie*

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

Inoltre $R_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Questo risultato si esprime dicendo che LA CODA (O IL RESTO) DI UNA SERIE CONVERGENTE È INFINITESIMA.

7.2. Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

☞ **Osservazione 7.2.1.** Nelle serie a termini non negativi, le somme parziali sono una successione monotona debolmente crescente; infatti se $a_n \geq 0$ per ogni n si ha

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Dai teoremi di esistenza del limite per successioni monotone, si ottiene il seguente risultato

Teorema 7.2.2. *Una serie a termini non negativi o converge o diverge a $+\infty$ (essa converge se e solo se la successione delle somme parziali n -esime è limitata). Il valore della serie coincide con l'estremo superiore della successione delle somme parziali.*

☞ **Osservazione 7.2.3.** Quanto verrà detto per le serie con termini non negativi vale anche, con le opportune modifiche, per le serie con termini non positivi, e più in generale per le serie i cui termini sono definitivamente non negativi oppure definitivamente non positivi.

Teorema 7.2.4. (CRITERIO DEL CONFRONTO) *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali non negativi tali che definitivamente $a_n \leq b_n$ (in questo caso si dice che la serie b_n è maggiorante della serie a_n). Allora se $\sum_n b_n$ è convergente, si ha che $\sum_n a_n$ è convergente; se $\sum_n a_n$ è divergente, si ha che $\sum_n b_n$ è divergente.*

Molto spesso il criterio del confronto viene applicato in una forma leggermente diversa, tramite il seguente risultato.

Teorema 7.2.5. (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO) *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni di numeri reali positivi, tali che*

$$a_n \sim b_n$$

allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere, nel senso che sono entrambe convergenti o entrambe divergenti.


☞ **Esempio 7.2.6.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^3 + 2}$$

diverge perché

$$\frac{3n^2 + 5}{n^3 + 2} \sim \frac{3}{n}$$

e quindi la serie data, dal criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica (per essere precisi 3 volte la serie armonica) che diverge come si vede più avanti.

 **Esempio 7.2.7.** La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n}$$

converge. Infatti dai limiti notevoli si sa che

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

quindi siccome $n \rightarrow \infty$ si ha che $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ si ottiene

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

A questo punto allora

$$\frac{e^{1/n} - 1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie data, dal criterio del confronto asintotico, ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.


 **Osservazione 7.2.8.** Il risultato precedente continua a valere se la condizione

$$a_n \sim b_n$$

viene sostituita dalla condizione più generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in (0, +\infty);$$

(quindi ℓ anzichè essere uguale a 1 come richiesto dalla condizione di essere asintotico può essere un numero finito diverso da zero).


 **Osservazione 7.2.9.** Il criterio del confronto vale solo se le due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono entrambe non negative; infatti, considerando le successioni

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

si ha che la serie $\sum_n a_n$ è convergente, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

ma la serie $\sum_n b_n$ diverge a $+\infty$, in quanto somma della serie $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$, che è convergente e della serie $\sum_n 1/n$ che diverge positivamente.

 **Esempio 7.2.10.** *La serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente. Infatti, essendo a termini positivi, esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, finito o no, dove con S_n indichiamo la successione delle somme parziali; ma dalla relazione

$$s_{2n} = s_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \geq s_n + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$

posto $x_n = s_{2^n}$, si ottiene la formula

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si ricava facilmente per induzione

$$x_n \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque $x_n = s_{2^n} \rightarrow +\infty$, per cui la serie in questione diverge.

Proposizione 7.2.11. (CRITERIO DELLA RADICE n -ESIMA)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi; supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{1/n} = L,$$

con $0 \leq L \leq +\infty$. Allora si ha

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty$$


$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty.$$

Più in generale vale la seguente

Proposizione 7.2.12. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi;

1) se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \leq (a_n)^{1/n} \leq q$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;

2) se definitivamente $a_n \geq 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

 **Osservazione 7.2.13.** A priori nulla si può dire sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{1/n} = 1.$$

Infatti si ha $\sum_n 1/n = +\infty$ mentre $\sum_n 1/n^2 < +\infty$, anche se per entrambe le serie si ha $(a_n)^{1/n} \rightarrow 1$.

Proposizione 7.2.14. (CRITERIO DEL RAPPORTO) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi; supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora si ha

$$L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n < +\infty$$

$$L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_n a_n = +\infty.$$

Più in generale vale la seguente

Proposizione 7.2.15. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi;

1) se esiste $q < 1$ tale che definitivamente si abbia $0 \leq (a_{n+1}/a_n) \leq q$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge;

2) se definitivamente $(a_{n+1}/a_n) \geq 1$, allora la serie $\sum_n a_n$ diverge.

☞ **Osservazione 7.2.16.** Gli stessi esempi visti per il criterio della radice n -esima mostrano che nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie $\sum_n a_n$ quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

☞ **Osservazione 7.2.17.** I criteri del rapporto e della radice, come pure il criterio del confronto forniscono solo condizioni *sufficienti* per la convergenza. Ovviamente se una serie non soddisfa alle ipotesi di uno di essi non è detto che diverga (e nemmeno se non soddisfa alle ipotesi di alcuno di essi).

Per utilizzare il seguente risultato è necessario conoscere il calcolo integrale (si veda il capitolo successivo)

Proposizione 7.2.18. (CRITERIO SERIE-INTEGRALE) Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione non negativa e debolmente decrescente; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

risulta convergente se e soltanto se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$. Inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

☞ **Osservazione 7.2.19.** Più in generale, se $f : [k, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ è una funzione non negativa e debolmente decrescente si ha

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n),$$

e quindi la serie $\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in un intorno di $+\infty$.

✎ **Esempio 7.2.20.** Fissato un numero reale positivo α , la funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ è decrescente su $(0, +\infty)$; inoltre essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\alpha > 1$. Questo permette di provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = +\infty \Leftrightarrow \alpha \leq 1,$$

e che inoltre si ha

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

si chiama SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

✎ **Esempio 7.2.21.** Per ogni $\beta > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x \log^{\beta} x}$$

è decrescente su $(1, +\infty)$; inoltre essa è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $\beta > 1$, dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n} < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Inoltre si ha

$$\frac{1}{(\beta - 1) \log^{\beta-1} 2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\beta} n} \leq \frac{1}{(\beta - 1) \log^{\beta-1} 2} + \frac{1}{2 \log^{\beta} 2}.$$

☞ **Osservazione 7.2.22.** I criteri di convergenza per le serie a termini non negativi si basano tutti sulla proprietà dell'estremo superiore, di cui gode l'insieme dei numeri reali.

7.3. Serie a termini di segno variabile

□ **Definizione 7.3.1.** Si dice che una serie $\sum_n a_n$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Teorema 7.3.2. (CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA) Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente; allora anche la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente e si ha

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

☞ **Osservazione 7.3.3.** Il teorema precedente non si può invertire: infatti è importante ricordare che ci sono serie *convergenti ma non assolutamente convergenti*; l'esempio classico è rappresentato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge (criterio di Leibniz, vedi Teorema 7.3.5 ma non converge assolutamente (infatti si tratta della serie armonica).

☞ **Osservazione 7.3.4.** Date due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, possiamo considerare la loro somma $\sum_n (a_n + b_n)$; dai teoremi sui limiti delle somme, otteniamo subito che se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ è convergente, e si ha

$$\sum_n (a_n + b_n) = \sum_n a_n + \sum_n b_n,$$

mentre se una è convergente e l'altra è divergente, o sono entrambe divergenti dalla stessa parte, la somma diverge. Rimane escluso il caso della somma di una serie divergente positivamente con una divergente negativamente.

Per quanto riguarda il prodotto, va invece notato che la serie $\sum_n a_n b_n$ non ha nulla a che vedere con le serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, come mostrano ad esempio le serie $\sum_n ((-1)^n + 1)$ e $\sum_n ((-1)^{n+1} + 1)$: entrambe sono divergenti positivamente, mentre la serie $\sum_n ((-1)^n + 1)((-1)^{n+1} + 1)$ è la serie identicamente nulla.

Teorema 7.3.5. (CRITERIO DI LEIBNIZ) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali non negativi, debolmente decrescente, infinitesima; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

risulta convergente.

☞ **Osservazione 7.3.6.** Se nel Teorema 7.3.5 si elimina la condizione che la successione $\{a_n\}_n$ sia infinitesima, per il Teorema 7.1.5 la serie non può convergere. Più interessante è osservare che

anche se si elimina l'ipotesi che $\{a_n\}_n$ sia decrescente, la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ può non risultare più convergente. Consideriamo ad esempio la successione

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Essa è non negativa e infinitesima, ma si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

☞ **Osservazione 7.3.7.** Dalla dimostrazione del Teorema 7.3.5 si ricava che, detta s la somma della serie $\sum_n (-1)^n a_n$, si ha

$$s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e l'errore che si commette approssimando s con s_{2n} o con s_{2n+1} , si può stimare con

$$|s_{2n} - s_{2n+1}| = a_{2n+1}.$$

7.4. Riassumendo

Dire se le seguenti implicazioni sono vere o false.

Se una serie converge allora converge assolutamente.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Se una serie converge assolutamente allora converge.

Vero: criterio di convergenza assoluta.

Se una serie è a termini positivi, non può essere indeterminata.

Vero: infatti la successione delle somme parziali è monotona e quindi ammette limite (finito o $+\infty$).

Se una serie converge allora il termine generale è infinitesimo.

Vero: è la condizione necessaria.

Se il termine generale di una serie è infinitesimo allora la serie converge.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ogni serie a termini di segno alternato converge.

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

Se $\sum a_n < \infty$ allora $\sum a_n^2 < \infty$

Falso: controesempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che converge per il criterio di Leibniz ma

$$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$$

che diverge. Un ragionamento errato a questo proposito sarebbe dire: siccome $\sum a_n < \infty$ allora $a_n \rightarrow 0$ quindi definitivamente $a_n \leq 1$ e allora $a_n^2 \leq a_n$ che risulta vero a patto che $a_n \geq 0$.

7.5. Esercizi proposti

✎ **Esercizio 7.5.1.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(2n+1)}{n^3}$$

Se n è pari, allora

$$\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 1$$

invece se n è dispari, allora

$$\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = -1$$

quindi la serie data è equivalente alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

che soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz quindi converge.

✎ **Esercizio 7.5.2.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

La serie data è a termini non negativi. Risulta ben definita perché

$$1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

Inoltre dai limiti notevoli si ha che

$$\log(1+x) \sim x \quad x \rightarrow 0$$

quindi siccome $n \rightarrow \infty$ allora $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e dunque

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Allora la serie di partenza si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che diverge (serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = 1/2$).

✎ **Esercizio 7.5.3.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi, infatti

$$0 \leq \cos^2 \frac{1}{n} \leq 1$$

quindi

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

quindi dal criterio del confronto la serie data è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

✎ **Esercizio 7.5.4.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando il limite notevole

$$\sin x \sim x \quad x \rightarrow 0$$

si ha che

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

quindi

$$\frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^4}$$

e allora la serie data si comporta, dal criterio del confronto asintotico, come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

che converge.

✎ **Esercizio 7.5.5.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Di nuovo dai limiti notevoli si ha

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n \rightarrow \infty$$

quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

e la serie data, dal criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica che diverge.

✎ **Esercizio 7.5.6.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizziamo il criterio del rapporto. Ponendo

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0$$

quindi la serie data converge.

✎ **Esercizio 7.5.7.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$$

Siccome

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria.

✎ **Esercizio 7.5.8.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando di nuovo i limiti notevoli

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n \rightarrow \infty$$

si ha che la serie data, per il criterio del confronto asintotico, si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che diverge.

✎ **Esercizio 7.5.9.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$$

La serie data è a termini non negativi. Utilizzando di nuovo i limiti notevoli

$$\tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

si ha che la serie data, per il criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie armonica che diverge.

✎ **Esercizio 7.5.10.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \left(\frac{\pi + (-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} \right)$$

Anche se a prima vista non sembra, la serie data è a termini non negativi. Infatti visto che $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ si ha

$$\frac{\pi - 1}{\pi(n^2 + 1)} \leq \frac{\pi + (-1)^n}{\pi(n^2 + 1)} \leq \frac{\pi + 1}{\pi(n^2 + 1)}$$

quindi usando il limite notevole $\tan z \sim z$ per $z \rightarrow 0$ si ha che la serie data è maggiorata dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi + 1}{\pi(n^2 + 1)} \leq (\pi + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

l'ultima serie a destra converge quindi per il criterio del confronto anche la serie di partenza converge.

✎ **Esercizio 7.5.11.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0,$$

la serie data non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✎ **Esercizio 7.5.12.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^n$$

Prima di tutto calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log(1 + \frac{1}{n!})} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n/n!} = 1 \neq 0$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$\log \left(1 + \frac{1}{n!} \right) \sim \frac{1}{n!} \quad n \rightarrow +\infty$$

Allora la serie data non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✎ **Esercizio 7.5.13.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{30!}\right)^n$$

Calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{30!}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log\left(1 + \frac{1}{30!}\right)} = +\infty$$

quindi anche questa serie non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✎ **Esercizio 7.5.14.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n$$

La serie data (che è a termini non negativi) converge perché è serie geometrica di ragione $\frac{1}{30!}$.

Nota bene: diversamente dall'esercizio precedente se si calcola

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n$$

per vedere se viene soddisfatta la condizione necessaria si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{30!}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log \frac{1}{30!}} = 0$$

perché

$$\frac{1}{30!} < 1 \Rightarrow \log \frac{1}{30!} < 0$$

✎ **Esercizio 7.5.15.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n + (-1)^n n^2}\right)$$

Se n è pari, si ha $(-1)^n = 1$ e quindi la serie data è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + n^2}$$

che converge in quanto

$$\frac{1}{n + n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + n^2}$$

si comporta come la serie (dal criterio del confronto asintotico)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge (serie a termini positivi).

Invece se n è dispari si ha che $(-1)^n = -1$ e quindi la serie data è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - n^2}$$

e anch'essa converge in quanto

$$\frac{1}{n - n^2} \sim -\frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - n^2}$$

si comporta come la serie (dal criterio del confronto asintotico)

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge (a un numero negativo perchè è una serie a termini definitivamente negativi).

Allora la serie di partenza è la somma di due serie convergenti dunque anch'essa converge.

✎ **Esercizio 7.5.16.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 + e^{-n})$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz. Ponendo

$$a_n = 1 + e^{-n}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è decrescente ma a_n non è infinitesima! Infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$$

quindi il criterio di Leibniz non è applicabile e la serie data non converge (perché non è verificata la condizione necessaria).

✎ **Esercizio 7.5.17.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{-n})$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz. Ponendo

$$a_n = e^{-n}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è decrescente e stavolta a_n è infinitesima, infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

quindi la serie data converge dal criterio di Leibniz.

✎ **Esercizio 7.5.18.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

La serie è a termini di segno alternato. L'idea è quella di applicare il criterio di Leibniz. Ponendo

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

si ha che $a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$ e occorrerebbe solo dimostrare che a_n è decrescente. Questo è equivalente a mostrare che $b_n := n - \sqrt{n}$ è crescente. Usiamo la definizione. Bisogna dimostrare che $b_n \leq b_{n+1}$ cioè occorre verificare che

$$n - \sqrt{n} \leq (n+1) - \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n}(\sqrt{n} + 1) \leq \sqrt{n+1}$$

ma d'altra parte, essendo la radice quadrata una funzione crescente, se $n \geq 1$ si ha che

$$\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \leq \sqrt{n+1}(\sqrt{n} - 1) \leq (n+1) - \sqrt{n+1}$$

quindi il criterio di Leibniz è applicabile e la serie data converge per il criterio di Leibniz.

✎ **Esercizio 7.5.19.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

La serie data è a termini di segno alternato e si può mostrare che converge per il criterio di Leibniz. Primo modo: ponendo

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$$

che si vede banalmente che è una successione a termini non negativi e infinitesima; per la decrescenza ci si basa sul fatto che è prodotto di \sqrt{n} che è crescente e $\frac{1}{n - \sqrt{n}}$ che è decrescente dall'esercizio precedente. Secondo modo: semplificando ottengo

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$$

che banalmente soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz.

✎ **Esercizio 7.5.20.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - n \sin^2 n}$$

La serie è a termini di segno variabile e non si riesce facilmente a dimostrare che ponendo

$$a_n = \frac{1}{n^2 - n \sin^2 n}$$

sia non negativa, infinitesima e decrescente (oscilla).

Però si osserva che

$$\sin^2 n \leq 1 \Leftrightarrow -\sin^2 n \geq -1 \Leftrightarrow -n \sin^2 n \geq -n$$

da cui

$$n^2 - n \sin^2 n \geq n^2 - n$$

quindi la serie data è maggiorata in valore assoluto da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$$

cioè

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 - n \sin^2 n} \right| \leq \frac{1}{n^2 - n}$$

La serie a secondo membro è a termini definitivamente positivi, e converge (confronto asintotico con la serie armonica generalizzata). Quindi la serie data converge assolutamente e perciò (dal criterio della convergenza assoluta) converge.

✎ **Esercizio 7.5.21.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$$

Siccome è facile verificare che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ la serie data è equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1 + n^2}$$

Posto

$$a_n = \frac{n}{1 + n^2}$$

sicuramente $a_n \geq 0$, a_n è infinitesima e il problema di nuovo è verificare che è decrescente, al fine di poter applicare il criterio di Leibniz. A tal scopo, si può procedere o con la definizione, oppure passando dalla variabile discreta alla variabile continua quindi considerando la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \quad x \geq 0$$

che (da un breve studio) è tale che $f(0) = 0$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, $f(x) \rightarrow 0$ se $x \rightarrow \infty$ e f ha massimo per $x = 1$; quindi sicuramente per $x \geq 1$ la funzione data è decrescente, quindi anche la corrispondente successione è decrescente se $n \geq 1$. In conclusione la serie data converge per il criterio di Leibniz.

✎ **Esercizio 7.5.22.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right)$$

La serie data è a termini non negativi. Dalla gerarchia degli infiniti e dai limiti notevoli si ha che

$$\tan\left(\frac{n}{1+n^3}\right) \sim \frac{n}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

quindi la serie di partenza si comporta (per il criterio del confronto asintotico) come la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge.

✎ **Esercizio 7.5.23.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

La serie data è a termini non negativi. Dal criterio del confronto serie-integrale si ha che la serie data si comporta come l'integrale

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. -(\log x)^{-1} \right|_2^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log A} = \frac{1}{\log 2} < +\infty \end{aligned}$$

quindi anche la serie data converge.

✎ **Esercizio 7.5.24.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n!}$$

La serie data è a termini non negativi. Si ha che

$$\log n! = \log(n(n-1)(n-2)\dots 2) > n \log 2$$

quindi si ha la seguente catena di maggiorazioni

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n!} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

quindi dal criterio del confronto la serie data converge.

✎ **Esercizio 7.5.25.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$$

La serie data è a termini non negativi. L'idea è quella di applicare il criterio del rapporto. Ponendo

$$a_n = \frac{n+1}{n!}$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \rightarrow 0$$

quindi definitivamente il rapporto è minore di 1 e perciò la serie data converge.

✎ **Esercizio 7.5.26.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$$

Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{e^{2n \log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 - 2n \log n}$$

ma a questo punto il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie data non converge perché non soddisfa la condizione necessaria.

✎ **Esercizio 7.5.27.** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sin^2 n}$$

La serie data è una serie a termini non negativi. Visto che $\sin^2 n \leq 1$ si ha che (attenzione al verso della maggiorazione!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sin^2 n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica), quindi la serie data diverge perché maggiora una serie divergente.

✎ **Esercizio 7.5.28.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n\sqrt{n}}$$

La serie data è a termini non negativi. Dalla gerarchia degli infiniti, si ha, per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$$

quindi per esempio ponendo $\alpha = 8$ si ha che definitivamente

$$\log n \leq \sqrt[8]{n}$$

Allora si può maggiorare la serie di partenza ad esempio con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n}}$$

che converge e quindi anche la serie di partenza converge per il criterio del confronto.

✎ **Esercizio 7.5.29.** Studiare la convergenza della seguente serie numerica di termine generale

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n + \sin^2 n} & n \text{ dispari} \\ \frac{1}{n + \pi} & n \text{ pari} \end{cases}$$

Se n è dispari si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \sin^2 n} \geq \frac{1}{2n + 1}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica).

Invece se n è pari, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \pi}$$

che diverge (confronto asintotico con la serie armonica). Quindi anche la serie di partenza (che è a termini non negativi) diverge.

✎ **Esercizio 7.5.30.** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(e^{2\alpha})}$$

La serie data è una serie armonica generalizzata con esponente

$$\gamma = e^{2\alpha}.$$

Si sa che la serie armonica generalizzata converge se $\gamma > 1$ quindi la serie di partenza converge per $e^{2\alpha} > 1$ cioè $\alpha > 0$.

✎ **Esercizio 7.5.31.** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^{2\alpha+1}}$$

La serie data è a termini non negativi. Dai limiti notevoli si ha che

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

quindi

$$\frac{e^{1/n} - 1}{n^{2\alpha+1}} \sim \frac{1}{n^{2\alpha+2}}$$

quindi la serie di partenza (dal criterio del confronto asintotico) si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $2\alpha + 2$. Sappiamo che essa converge se $2\alpha + 2 > 1$ quindi se $\alpha > -1/2$.

✎ **Esercizio 7.5.32.** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)^{n/2}}$$

Calcolare poi la somma della serie al variare di α .

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)^{n/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\alpha + 1)^n}$$

La serie data (serie geometrica di ragione $\frac{1}{2\alpha+1}$) converge se

$$\left| \frac{1}{2\alpha + 1} \right| < 1$$

e risolvendo la disequazione si ottiene

$$\left| \frac{1}{2\alpha + 1} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha + 1} - 1 < 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2\alpha + 1} + 1 > 0$$

che è equivalente a

$$\frac{-2\alpha}{2\alpha + 1} < 0 \quad \wedge \quad \frac{2\alpha + 2}{2\alpha + 1} > 0$$

cioè

$$\left[\alpha < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \alpha > 0 \right] \quad \wedge \quad \left[\alpha < -1 \quad \vee \quad \alpha > -\frac{1}{2} \right]$$

quindi si ha convergenza per

$$\alpha < -1 \quad \vee \quad \alpha > 0.$$

Si ha poi per tali valori di α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\alpha + 1} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2\alpha+1}} - 1$$

(si deve sottrarre 1 perché la formula vale per calcolare la somma della serie per n che va da zero a infinito, non da 1 a infinito!) quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\alpha + 1} \right)^n = \frac{1}{2\alpha}.$$

✎ **Esercizio 7.5.33.** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \sin \frac{1}{n}}$$

Vediamo per quali valori di α si ha convergenza assoluta. Si ha

$$\left| \frac{1}{n^\alpha \sin \frac{1}{n}} \right| \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

quindi si ha convergenza assoluta della serie per $\alpha > 2$; per tali valori si ha anche convergenza della serie.

Invece se $\alpha - 1 \leq 0$ (cioè se $\alpha \leq 1$) il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie data non soddisfa la condizione necessaria. Pertanto la serie non converge. Resta quindi da analizzare l'insieme dei valori $1 < \alpha \leq 2$.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$. Si vorrebbe dimostrare che per $x \geq 0$ $f(x)$ è crescente in modo tale da poter applicare alla corrispondente successione il criterio di Leibniz. Studiamo

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = x^{\alpha-2} \left[\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right]$$

Si vorrebbe dimostrare che il contenuto della parentesi quadra è sempre positivo. A tal fine, l'idea è quella di usare gli sviluppi di Taylor (si possono usare perché x tende a infinito quindi $1/x$ tende a zero (per $x \geq 0$); il problema è che si vorrebbe evitare di usare il resto secondo Peano perché non ha un segno ben definito. Allora si può osservare che in generale, per $z \rightarrow 0$

$$\sin z - z + \frac{z^3}{6} \geq 0$$

(perché il termine successivo dello sviluppo di Taylor del seno ha segno positivo) mentre

$$\cos z - 1 + \frac{z^2}{2} \leq 0$$

(perché il termine successivo nello sviluppo del coseno avrebbe segno negativo) quindi mettendo insieme le due cose si ha la seguente maggiorazione

$$\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \geq \alpha x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} \right) - 1 + \frac{1}{2x^2} = -1 + \alpha + \frac{1}{x^2} \left[-\frac{\alpha}{3} + 1 \right] > 0$$

perché il termine tra parentesi è positivo, essendo $1 < \alpha \leq 2$.

A questo punto allora ponendo

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha \sin \frac{1}{n}}$$

si ha che $a_n \geq 0$, a_n è infinitesima e decrescente (dal conto fatto dalla corrispondente funzione).

Quindi si può applicare il criterio di Leibniz e si ha convergenza anche per $1 < \alpha \leq 2$.

Riassumendo si ha convergenza per $\alpha > 1$ e non convergenza per $\alpha \leq 1$.

Esercizio 7.5.34. Sia $\sum a_n$ una serie tale che $\sum a_n^2 < \infty$. Allora si può concludere che $\sum a_n^2 < \infty$?

La risposta è affermativa. Infatti se $\sum a_n^2 < \infty$, allora dalla condizione necessaria $a_n^2 \rightarrow 0$ quindi definitivamente $a_n^2 < 1$ perciò

$$a_n^4 = a_n^2 a_n^2 < a_n^2$$

quindi dal criterio del confronto anche $\sum a_n^4 < \infty$.

Esercizio 7.5.35. Sia $\sum a_n < \infty$ una serie convergente. Quale delle seguenti è sicuramente vera?

$$\boxed{\text{(a)}} \sum (1 + a_n)^2 < \infty \quad \boxed{\text{(b)}} \sum |a_n| < \infty \quad \boxed{\text{(c)}} \sum \sin a_n < \infty \quad \boxed{\text{(d)}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$$

La risposta corretta è la (c). Infatti se $\sum a_n < \infty$ allora per la condizione necessaria $a_n \rightarrow 0$ e quindi per i limiti notevoli $\sin a_n \sim a_n$ perciò dal criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come $\sum \sin a_n$ che pertanto converge. Le altre opzioni vengono invalidate dal controesempio

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che converge ma non assolutamente (quindi la (b) non vale); inoltre

$$\sum (1 + a_n)^2 = \sum \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2$$

che non converge perché non soddisfa la condizione necessaria quindi la (a) non vale. Infine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{n} (-1)^n$$

non esiste quindi a maggior ragione non tende a zero (perciò la (d) non vale).

✎ **Esercizio 7.5.36.** Sia $\sum \sqrt{a_n b_n} < \infty$ una serie convergente con $a_n > 0$ e $b_n > 0$. Quale delle seguenti è sicuramente vera?

$$\boxed{\text{(a)}} \sum \frac{a_n^2}{b_n^2} < \infty \quad \boxed{\text{(b)}} \sum \frac{b_n^2}{a_n^2} < \infty \quad \boxed{\text{(c)}} \sum (a_n^2 + b_n^2) = \infty \quad \boxed{\text{(d)}} \sum a_n^2 b_n^2 < \infty$$

Dall'ipotesi se la serie $\sum \sqrt{a_n b_n} < \infty$ converge allora $\sqrt{a_n b_n} \rightarrow 0$ quindi definitivamente è minore di 1. Allora

$$a_n^2 b_n^2 = \sqrt{a_n b_n} (\sqrt{a_n b_n})^{3/2} < \sqrt{a_n b_n}$$

e quindi la (d) è verificata dal teorema del confronto.

La (a) e la (b) non valgono; basta prendere $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$ in entrambi i casi il rapporto $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{b_n^2}{a_n^2} = 1$ e quindi le rispettive serie non convergono perché non è soddisfatta la condizione necessaria.

Infine la (c) non vale; basta prendere lo stesso controesempio di prima che dà una serie convergente.

CAPITOLO 8

Integrazione

Il calcolo integrale storicamente nasce per risolvere due problemi fondamentali. Il primo è il problema di misurare l'area di una figura piana e il secondo è quella di misurare la lunghezza di una curva. Per quanto riguarda il primo problema, l'idea è quella di riportare una figura di riferimento (unità di misura) e vedere quante volte è contenuta nella figura piana da misurare; questo può essere agevole se la figura da misurare ha contorni rettilinei ma ad esempio come si può misurare correttamente l'area del cerchio? La stessa cosa accade con il secondo problema: l'idea è riportare sulla curva una lunghezza unitaria (un segmento unitario) e vedere quante volte è contenuto nella curva di cui si vuole conoscere la lunghezza ma il problema di nuovo si pone quando si intende misurare la lunghezza di una curva generica.

Già nel 300 a.C. con Euclide, era chiaro il ragionamento che per risolvere questi problemi fosse necessario far ricorso all'idea di approssimazioni successive, sempre più accurate. A quel tempo ad esempio il problema di calcolare l'area del cerchio veniva risolto attraverso il calcolo dell'area di poligoni regolari inscritti e circoscritti, con un numero di lati sempre crescente; era già quindi intrinseca l'idea di un procedimento infinito e di un passaggio al limite.

Tuttavia è solo molto più recentemente, intorno alla fine del 1600/inizi del 1700 che si lega il concetto di area a quello di integrale visto come *limite di somme*. Questa è anche la definizione che usiamo al giorno d'oggi. La teoria che andiamo a presentare si chiama TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN per distinguerla dalla TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE a cui faremo solo qualche cenno ogni tanto ma una cui accurata presentazione esula dagli scopi di questo corso.

8.1. Definizione di integrale e prime proprietà

Consideriamo un intervallo limitato $[a, b]$ di \mathbb{R} ed una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata; notiamo esplicitamente che f potrebbe anche non essere continua, però per ora assumiamo che sia

almeno definita in ogni punto di $[a, b]$ (e ivi limitata).

□ **Definizione 8.1.1.** Chiameremo **SUDDIVISIONE** o **PARTIZIONE** di $[a, b]$ ogni insieme finito

$$\mathcal{A} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

□ **Definizione 8.1.2.** Date due suddivisioni \mathcal{A} e \mathcal{B} dell'intervallo $[a, b]$, diremo che \mathcal{A} è più fine di \mathcal{B} se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

È chiaro che se \mathcal{A} è più fine di \mathcal{B} , la suddivisione \mathcal{A} è ottenuta intercalando altri punti tra i punti di \mathcal{B} ; perciò ogni intervallo di \mathcal{B} si spezza in un numero finito di intervallini che fanno parte della suddivisione \mathcal{A} .

☞ **Osservazione 8.1.3.** La relazione di finezza, che viene a coincidere con una relazione di inclusione tra insiemi, è evidentemente una relazione d'ordine. Inoltre, date due suddivisioni \mathcal{A}' e \mathcal{A}'' ne esiste una più fine di entrambe: basta prendere $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ ad esempio.

Per semplicità (comunque senza perdita di generalità) d'ora in poi considereremo solo suddivisioni equispaziate, cioè tali che

$$x_j = a + jh \quad h = \frac{b-a}{n} \quad j = 0, \dots, n.$$

In ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$ scegliamo un punto arbitrario ξ_j (per $j = 1, 2, \dots, n$).

Consideriamo la seguente somma (detta **SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN**)

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(\xi_j).$$

L'idea è quella di passare al limite per $n \rightarrow \infty$.

Si arriva così alla seguente definizione.

□ **Definizione 8.1.4.** Diciamo che la funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **INTEGRABILE** se detta S_n una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann, al variare di $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

e tale limite non dipende da come abbiamo scelto i punti ξ_j . In tal caso si pone

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Il simbolo di integrale ricorda l'idea di "somma"; il " dx " ricorda la lunghezza di un piccolo intervallo della suddivisione lungo x .

☞ **Osservazione 8.1.5.** Si noti che all'interno dell'integrale le variabili sono mute, ad esempio si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

☞ **Osservazione 8.1.6.** (INTERPRETAZIONE GEOMETRICA) Questa definizione ha un'importante interpretazione geometrica; consideriamo una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia anche non negativa, e definiamo il SOTTOGRAFICO DI f come l'insieme

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

cioè la parte del piano cartesiano compresa tra la retta verticale $x = a$, la retta verticale $x = b$, la retta orizzontale $x = 0$ ed il grafico della funzione f . Per ogni suddivisione \mathcal{A} di $[a, b]$ si nota che la somma di Cauchy-Riemann definita prima coincide con l'area del plurirettangolo relativo a f e ad \mathcal{A} , la quale è esprimibile come somma di tanti rettangoli di base $\frac{b-a}{n}$ (che è la lunghezza del segmento compreso tra due punti della suddivisione, che per ipotesi abbiamo preso equispaziata) e di altezza $f(\xi_j)$. Abbiamo potuto parlare di area perché un plurirettangolo è scomponibile appunto in un numero finito di rettangoli, che a loro volta sono figure per le quali sappiamo cosa significa la parola AREA: base per altezza. Invece non è chiaro cosa possa essere in generale l'area per una figura piana qualsiasi, ad esempio per il sottografo $\Gamma(f)$; certamente se quest'area ha qualche significato, è chiaro che all'infittirsi della suddivisione (cioè se $n \rightarrow \infty$) l'area del plurirettangolo sarà un'approssimazione sempre migliore dell'area del sottografo, pertanto se f è integrabile sarà naturale definire l'area del suo sottografo $\Gamma(f)$ come l'integrale di f su $[a, b]$:

$$\text{Area}(\Gamma(f)) = \int_a^b f(x) dx.$$

Se invece f non è integrabile, non sarà possibile definire l'area $\Gamma(f)$.

Da quanto appena detto si ha che l'area di un dominio piano che è sottografo di una funzione integrabile non negativa può essere calcolata mediante l'integrale della funzione stessa. Analogamente, se un dominio può essere decomposto in una unione o differenza di un numero finito di sottografi, la sua area sarà la somma o la differenza dei rispettivi integrali. Ad esempio, in tal modo si potrà ottenere che il cerchio $C = \{(x, y) : (x - 3/2)^2 + (y - 2)^2 \leq 1\}$, differenza dei due sottografi di $f_1(x) = 2 + \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$ e di $f_2(x) = 2 - \sqrt{3x - x^2 - 5/4}$, ha area π .

Tutto questo è possibile con l'ipotesi che f sia non negativa; se f è negativa, l'integrale di f coincide con l'area del sottografo ma con il segno cambiato. In questo senso si parla dell'integrale come di AREA CON SEGNO. Vedremo più avanti alcuni esercizi che illustreranno meglio questi concetti.

8.2. Classi di funzioni integrabili

Come abbiamo visto, se una funzione è integrabile è possibile definire l'area del sottografico che coincide con l'integrale della funzione stessa. Obiettivo principale è dunque quello di individuare classi di funzioni integrabili. Si ha il seguente importante teorema

Teorema 8.2.1.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e limitata, allora è integrabile.

Se $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili, allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a, b) \\ f_2(x) & x \in (b, c] \\ k & x = b \end{cases}$$

(dove k è un qualunque numero reale) è integrabile in $[a, c]$.

L'ultima parte del teorema può essere estesa a un numero qualunque finito di funzioni. Si noti che l'integrale non cambia qualunque sia la scelta della definizione della f sul punto di raccordo tra i due intervallo $x = b$; questo perché un punto in $[a, b]$ è un *insieme di misura nulla* cioè in qualche modo "trascurabile" rispetto al resto (gli insiemi di misura nulla costituiscono un punto molto importante nella teoria della misura ma ulteriori approfondimenti esulano dagli scopi del corso).

☞ **Osservazione 8.2.2.** Non tutte le funzioni limitate sono integrabili, come mostra il seguente esempio.

📎 **Esempio 8.2.3.** Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la FUNZIONE DI DIRICHLET definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si può dimostrare che questa funzione è discontinua in ogni punto di $[0, 1]$.

Dato che sia \mathbb{Q} che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in \mathbb{R} , cioè comunque preso un intervallo esso contiene sia infiniti punti razionali che infiniti punti che sono reali ma non razionali, se nella somma di Cauchy-Riemann si prendono tutti gli $\xi_j \in \mathbb{Q}$ si ottiene

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\xi_j) (x_j - x_{j-1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1 = 1$$

mentre se si prendono tutti gli $\xi_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora $S_n = 0$.

Quindi il limite delle somme di Cauchy-Riemann dipende dalla scelta dei punti ξ_j , pertanto la funzione di Dirichlet non è integrabile (secondo Riemann) su $[0, 1]$. In particolare, per quanto visto, non si può definire l'area del sottografico di f .

Torniamo al Teorema 8.2.1; per generalizzarlo si può introdurre la seguente definizione.

□ Definizione 8.2.4. Si dice che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è GENERALMENTE CONTINUA se essa è limitata e se esistono un numero finito di punti, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tali che f è continua sull'insieme $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, il quale risulta unione finita di intervalli.

Si può dimostrare allora che ogni funzione generalmente continua su $[a, b]$ è integrabile. Va comunque osservato che la classe delle funzioni generalmente continue non esaurisce la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo $[a, b]$; si potrebbe ad esempio dimostrare che anche le funzioni limitate i cui l'insieme dei punti di discontinuità ha un numero finito di punti di accumulazione risultano integrabili secondo Riemann. Neppure questa però è una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità: non è difficile ad esempio vedere che la seguente funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, \quad m, n \text{ primi tra loro} \end{cases}$$

pur essendo discontinua in ogni punto razionale è integrabile su $[0, 1]$ ed ha integrale nullo.

Con la conoscenza dell'integrale secondo Lebesgue si può dimostrare che la *condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia integrabile secondo Riemann è che l'insieme dei suoi punti di discontinuità abbia misura nulla secondo Lebesgue* ma di nuovo approfondimenti in questa direzione esulano dagli scopi del nostro corso.

☞ Osservazione 8.2.5. Le osservazioni precedenti mostrano che se f e g sono integrabili, ed $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ salvo al più un numero finito di punti, allora gli integrali di f e di g su $[a, b]$ sono uguali. In particolare, se $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, salvo al più un numero finito di punti, l'integrale di f su $[a, b]$ è uguale all'integrale della funzione costante zero, il quale vale zero: allora una funzione f può avere integrale zero su qualsiasi intervallo senza essere la funzione costantemente nulla. Questo non accade se aggiungiamo qualche ipotesi su f , come mostra il prossimo risultato.

Proposizione 8.2.6. Se f è una funzione continua e non negativa su un intervallo $[a, b]$ non ridotto a un punto, allora

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

✎ **Esempio 8.2.7.** Dalla definizione di integrale si ottiene subito che ogni funzione costante è integrabile su ogni intervallo $[a, b]$, e che

$$f(x) \equiv c \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

✎ **Osservazione 8.2.8.** Vi è un'ampia arbitrarietà nella costruzione delle somme di Cauchy. Quando si sappia già che la funzione in questione è integrabile si può usare questa arbitrarietà per compiere il calcolo dell'integrale nel modo più semplice possibile.

✎ **Esempio 8.2.9.** Si voglia calcolare:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx \quad 0 < a < b.$$

Una somma di Cauchy ha l'espressione $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{1}{z_k^2}$ dove è $x_{k-1} \leq z_k \leq x_k$. Presa ad arbitrio la suddivisione $\{x_0, \dots, x_n\}$, è possibile scegliere z_k in modo tale che sia $\frac{1}{z_k^2} = \frac{1}{x_k x_{k-1}}$; evidentemente, si deve prendere z_k uguale alla media geometrica di x_{k-1} e x_k . Con questa scelta si ha:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \frac{1}{z_k^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

L'integrale può essere calcolato prendendo il limite di queste particolari somme di Cauchy. Ma poiché esse hanno un valore costante, il limite coincide con questo. Pertanto:

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Il metodo esposto può essere generalizzato per calcolare direttamente l'integrale

$$\int_a^b \frac{1}{x^r} dx \quad 0 < a < b, \quad r \text{ intero} > 0.$$

✎ **Esempio 8.2.10.** Calcoliamo:

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx \quad (a > 1).$$

Conviene prendere i punti x_k della suddivisione in progressione geometrica, che avrà ragione $r = a^{1/n}$; perciò si ha:

$$x_0, \quad x_1 = r, \quad \dots \quad x_k = r^k, \quad \dots, \quad x_n = r^n = a.$$

Prendiamo poi z_k uguale all'estremo sinistro dell'intervallo k -esimo. La somma integrale è:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (r^k - r^{k-1}) \frac{1}{r^{k-1}} = \sum_{k=1}^n (r - 1) = n(a^{1/n} - 1).$$

Verifichiamo che la massima ampiezza degli intervalli tende a zero:

$$r^k - r^{k-1} = r^{k-1}(r - 1) < r^n(r - 1) = a(a^{1/n} - 1),$$

che effettivamente tende a zero. Quindi

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \log a.$$

Procedendo in maniera analoga, si può calcolare l'integrale

$$\int_1^a \log x dx \quad (a > 1).$$

In generale comunque questi esempi mostrano che anche il calcolo di semplici integrali può diventare piuttosto complicato se ci si basa unicamente sulla definizione. Cercheremo allora nei prossimi paragrafi di trovare una strada che ci permetta di calcolare integrali anche piuttosto complicati in maniera più agevole.

8.3. Proprietà dell'integrale

Premettiamo prima alcune proprietà degli integrali. Si ha il seguente importante teorema

Teorema 8.3.1. *Siano f e g funzioni integrabili definite su $[a, b]$. Allora valgono le seguenti proprietà dell'integrale:*

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE

Siano α, β costanti. Allora la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile e si ha

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

Sia $a \leq r \leq b$ allora f è integrabile su $[a, r]$ e su $[r, b]$ e vale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

Se $a < b$ si pone

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

POSITIVITÀ E MONOTONIA DELL'INTEGRALE

Se $f \geq 0$ in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Se $f \geq g$ in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Inoltre le funzioni f^+ , f^- e $|f|$ risultano integrabili, e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

☞ **Osservazione 8.3.2.** L'ultima parte del teorema appena enunciato non si può invertire, nel senso che se $|f|$ è integrabile, non è detto che anche f lo sia. Come controesempio consideriamo la funzione $f = 1_{\mathbb{Q}} - 1/2$, dove $1_{\mathbb{Q}}$ è la funzione di Dirichlet, che sappiamo non essere integrabile. Allora f non è integrabile, perché altrimenti anche la funzione di Dirichlet lo sarebbe, visto che le costanti lo sono. Tuttavia il valore assoluto di f è la costante $1/2$ che è integrabile.

☞ **Osservazione 8.3.3.** Da quanto visto finora, si ha che, fissato l'intervallo $[a, b]$, l'applicazione

$$f \mapsto \mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

che ad ogni funzione integrabile f associa il suo integrale, è un'applicazione lineare non decrescente, cioè verifica le ipotesi:

- a) $\mathcal{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{I}(f) + \beta \mathcal{I}(g)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed ogni f, g
 b) $\mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g)$ per ogni $f \leq g$.

□ **Definizione 8.3.4.** Data una funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, chiameremo *media di f su $[a, b]$* la quantità $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Teorema 8.3.5. (TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora si ha

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Nel caso in cui la funzione f sia continua, esiste $z \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(z).$$

Dimostrazione. Essendo per ogni $x \in [a, b]$

$$\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f$$

dalle proprietà dell'integrale appena enunciate si ottiene la prima parte. Per quanto riguarda la seconda parte, essendo f continua per il Teorema di Weierstrass ha massimo M e minimo m rispettivamente. Dalle proprietà di monotonia si ottiene

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx = M$$

quindi il valore $\int_a^b f(x) dx$ sta tra m e M . Per la proprietà dei valori intermedi esiste z tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(z)$$

per qualche $z \in [a, b]$ \square

8.4. Primitive. Teorema fondamentale del calcolo integrale

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti come l'integrale non si presta a un calcolo effettivo; in questo paragrafo dunque, mostreremo come il problema del calcolo di integrali si riduce a quello di un calcolo per variazione di una primitiva, cioè una funzione derivabile la cui derivata coincide con la funzione integranda. Quindi il problema essenziale diventerà la ricerca di primitive di opportune classi di funzioni. Cominciamo con la seguente definizione.

\square **Definizione 8.4.1.** Se f è una funzione definita su un intervallo $[a, b]$, si dice che $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è UNA PRIMITIVA DI f se G è derivabile su $[a, b]$ e si ha $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Proposizione 8.4.2. Due primitive di una stessa funzione sullo stesso intervallo differiscono per una costante.

Dimostrazione. Infatti siano G_1 e G_2 due primitive di una funzione f in $[a, b]$. Allora si ha per definizione che $G_1' - G_2' = 0$ in $[a, b]$ cioè $(G_1 - G_2)' = 0$ dunque $G_1 - G_2 = C$ con C costante reale (che era quello che volevamo dimostrare). \square

\Rightarrow **Osservazione 8.4.3.** Si noti che la dimostrazione precedente si basa in maniera essenziale sul fatto che siamo su un intervallo. Infatti dal fatto che $G_1' = G_2'$ non segue necessariamente che $G_1 - G_2$ è costante, se si elimina la condizione che $[a, b]$ sia un intervallo. Ad esempio le funzioni

$$G_1(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad G_2(x) = \begin{cases} 1 + \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

hanno entrambe derivata $1/x$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma la loro differenza non è una costante.

☞ **Osservazione 8.4.4.** Esistono funzioni che non hanno primitive. Ad esempio la funzione definita su tutto \mathbb{R} da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è una di queste. Infatti, se per assurdo F fosse una primitiva di f su tutto \mathbb{R} si avrebbe

$$F'(x) = 0 \quad \forall x < 0, \quad F'(x) = 0 \quad \forall x > 0,$$

per cui esisterebbero due costanti c_1 e c_2 tali che

$$F(x) = c_1 \quad \forall x < 0, \quad F(x) = c_2 \quad \forall x > 0.$$

Ma dovendo essere F derivabile (e quindi continua) su tutto \mathbb{R} , deve essere $c_1 = c_2 = F(0)$ e quindi $F(x) = c_1$ for all $x \in \mathbb{R}$. In particolare $F' \equiv 0$ ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere $F'(0) = f(0) = 1$. In particolare questo è dovuto al fatto che le derivate hanno la proprietà dei valori intermedi (vedi Sezione 6.13.1).

Teorema 8.4.5. (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) *Sia f una funzione continua su un intervallo $[a, b]$, e sia G una sua primitiva su $[a, b]$. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b = G(x) \Big|_a^b.$$

Dimostrazione. Si consideri una partizione di $[a, b]$ e sia $a = x_0$ e $b = x_n$. Allora si ha

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(x_n) - G(x_0) = [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] \\ &+ \cdots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] = \sum_{j=1}^n [G(x_j) - G(x_{j-1})] \end{aligned}$$

Applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$; allora esiste $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1}) G'(\xi_j) = (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j)$$

perché per ipotesi G è una primitiva di f e dunque $G'(\xi_j) = f(\xi_j)$. Allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) = S_n$$

dove S_n è una somma n -esima di Cauchy-Riemann per f . Questo vale per ogni n , quindi passando al limite si ottiene

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Siccome f è integrabile perché continua, allora questo procedimento va bene per ogni S_n . \square

□ **Definizione 8.4.6.** Si dice INTEGRALE INDEFINITO di f , e si indica con il simbolo

$$\int f(x) dx,$$

l'insieme di tutte le primitive di una funzione f rispetto alla variabile x , cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Invece la quantità

$$\int_a^b f(x) dx$$

viene detta INTEGRALE DEFINITO di f da a a b .

Il problema del calcolo di integrali dunque si riconduce a quello di saper determinare le primitive di opportune classi di funzioni.

☞ **Osservazione 8.4.7.** Occorre ricordare che non tutte le primitive riescono ad essere espresse in termini di funzioni elementari; ad esempio $\int e^{-x^2} dx$.

8.5. Tabella di primitive elementari

Si indichi con G la generica primitiva di f (a meno di costanti arbitrarie). Si ha la seguente tabella di primitive elementari.

	f	G
1.	c	cx
2.	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$
3.	$\frac{1}{x}$	$\log x $
4.	$\sin x$	$-\cos x$
5.	$\cos x$	$\sin x$
6.	e^x	e^x
7.	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$
8.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

8.6. Metodi di integrazione

8.6.1. Integrazione per scomposizione

Sfruttando la linearità dell'integrale si ha che

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

 **Esempio 8.6.1.**

$$\int \left(\frac{1}{\pi x} + a^{\pi x} \right) dx = \frac{1}{\pi} \log |x| + \frac{1}{\pi \log a} a^{\pi x} + C \quad a > 0$$

8.6.2. Integrazione per sostituzione


Sfruttando la formula di derivazione di una funzione composta si ha

$$\frac{d}{dx} G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

se si indica con G una primitiva di f , tale per cui si abbia dunque $G' = f$. Dunque passando alle primitive e ricordando il significato di primitiva si arriva alle seguenti formule

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(t) dt$$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

 **Esempio 8.6.2.** Sia da risolvere

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Operiamo la sostituzione $e^x = t$ da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$; d'altra parte per quanto riguarda gli estremi di integrazione, se $x = 0$ allora $t = 1$ mentre se $x = 1$ si ha $t = e$. Alla fine si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{1 + t^2} = [\arctan t]_1^e = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

✎ **Esempio 8.6.3.** Sia da risolvere

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx.$$

Operiamo la sostituzione $\cos x = t$ da cui $dt = -\sin x \, dx$. Si ha

$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{dt}{t} = -\log |t| + C = -\log |\cos x| + C$$

8.6.3. Integrali immediati

Come alternativa alla sostituzione si possono sfruttare le seguenti formule

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log |f(x)| + C$$

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) \, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$$

✎ **Esempio 8.6.4.**

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

✎ **Esempio 8.6.5.**

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

✎ **Esempio 8.6.6.**

$$\frac{\sin(3 \log x)}{x} \, dx = -\frac{1}{3} \cos(3 \log x) + C$$

✎ **Esempio 8.6.7.**

$$2x^2 \sqrt[3]{x^3 + 3} \, dx = \frac{2}{3} \int 3x^2 (x^3 + 3)^{1/3} \, dx = \frac{2}{3} \frac{(x^3 + 3)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{1}{2} (x^3 + 3)^{4/3} + C$$

8.6.4. Integrazione di funzioni razionali

Si tratta di calcolare

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Il punto chiave è che il grado del numeratore deve essere *inferiore* al grado del denominatore. In caso contrario prima di tutto si opera una divisione di polinomi fino ad avere (per linearità

dell'integrale) la somma di due integrali di cui uno è un polinomio e l'altro è una funzione razionale in cui appunto il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore. Quindi possiamo assumere questa ipotesi senza perdita di generalità.

Si distinguono diversi casi.

• **Primo caso: denominatore di primo grado**

In tal caso si ha

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log |ax+b| + C$$

✎ **Esempio 8.6.8.**

$$\int \frac{4}{3x+2} dx = \frac{4}{3} \log |3x+2| + C$$

• **Secondo caso: denominatore di secondo grado (radici distinte)**

In tal caso si cerca di scrivere l'integrale come somma di due integrali aventi denominatore di primo grado, attraverso la cosiddetta "riduzione per fratti semplici" illustrata dal seguente esempio.

✎ **Esempio 8.6.9.** *Sia da calcolare*

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2} dx$$

Il denominatore è di secondo grado e l'equazione corrispondente ammette due radici distinte (reali) per cui $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$. A questo punto l'idea è di riscrivere l'integrale proposto come

$$\int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx$$

cercando opportune costanti reali A e B che realizzino l'uguaglianza desiderata. Si ha dunque, facendo il minimo comun denominatore con l'idea di uguagliare membro a membro

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)} dx$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=4 \end{cases}$$

e dunque $A=3$ e $B=-2$. Riassumendo, sfruttando le formule relative al primo caso, si ha

$$\int \frac{x+4}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{2}{x+2} dx = 3 \log |x+1| - 2 \log |x+2| + C$$

- **Terzo caso: denominatore di secondo grado (quadrato perfetto)**

In questo caso si opera una sostituzione ponendo la radice del denominatore uguale a t , con l'idea di semplificare la formula dell'integrale, come mostra il seguente esempio.

 **Esempio 8.6.10.**

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{(2x+1)^2} &= \int \frac{\frac{t-1}{2} + 2}{t^2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int \frac{t+3}{t^2} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \log(t^2) - \frac{3}{4} \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \log(2x+1)^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{2x+1} \end{aligned}$$

- **Quarto caso: denominatore di secondo grado (denominatore non si annulla mai)**

In tal caso si ha

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

oppure nel caso più generale

$$\begin{aligned} \int \frac{x+d}{(x+b)^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2b}{x^2+2bx+b^2+a^2} dx + \int \frac{d-b}{(x+b)^2+a^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+2bx+b^2+a^2) + \frac{d-b}{a} \arctan \left(\frac{x+b}{a} \right) + C \end{aligned}$$

Un esempio riepilogativo verrà proposto nella sezione degli esercizi.

8.6.5. Integrazione per parti

Ricordando la formula della derivata di un prodotto di funzioni

$$(fg)' = f'g + fg'$$

si hanno le seguenti formule

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

✎ **Esempio 8.6.11.**

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

✎ **Esempio 8.6.12.**

$$\log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

✎ **Esempio 8.6.13.**

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

8.6.6. Integrazione delle funzioni trigonometriche

Nel caso di integrali di questo tipo

$$\int f(\sin x) \cos x dx$$

l'idea è quella di operare la seguente sostituzione $\sin x = t$ in modo che $dt = \cos x dx$. Analogamente n di integrali di questo tipo

$$\int f(\cos x) \sin x dx$$

l'idea è quella di operare la seguente sostituzione $\cos x = t$ in modo che $dt = -\sin x dx$. Invece ricordando le formule trigonometriche

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad (\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

si ottiene immediatamente

$$\int (\sin x)^2 dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C \quad \int (\cos x)^2 dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$$

(si ottiene lo stesso risultato integrando per parti una volta e poi usando il fatto che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Infine un integrale di una funzione razionale che contiene $\sin x$ e $\cos x$ deve essere trattata in maniera ancora differente. L'idea è quella di ricondurla all'integrale di una funzione razionale attraverso la sostituzione

$$t = \tan \frac{x}{2}$$


in questo modo si ottiene

$$x = 2 \arctan t \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

da cui

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

che vanno sostituiti nell'integrale corrispondente.

 **Esempio 8.6.14.**

$$\int \frac{\sin x}{3 + \sin x} dx$$

Con la sostituzione indicata si ottiene


$$\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

che semplificando si ha

$$\int \frac{4t}{3t^2 + 2t + 3} dt$$

che può essere risolto con le tecniche illustrate nel corrispondente paragrafo.


8.6.7. Esercizi proposti

 **Esercizio 8.6.15.**

$$\frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) dx + C$$

 **Esercizio 8.6.16.**

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) dx + C$$

 **Esercizio 8.6.17.**

$$e^x \sqrt{1+e^x} dx = \frac{(1+e^x)^{3/2}}{3/2} + C$$

 **Esercizio 8.6.18.**

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+5)^{-3/2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+5)^{-1/2}}{-1/2} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + C$$

 **Esercizio 8.6.19.**

$$\frac{3e^x}{1+e^{2x}} dx = 3 \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = 3 \arctan(e^x) + C$$

✎ **Esercizio 8.6.20.**

$$\frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx = \int \frac{1/x}{\sqrt{1-(\log x)^2}} = \arcsin(\log x) + C$$

✎ **Esercizio 8.6.21.**

$$\frac{x}{\cos^2(3x^2+5)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\cos^2(3x^2+5)} dx = \frac{1}{6} \tan(3x^2+5) + C$$

✎ **Esercizio 8.6.22.** Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8} dx$$

Innanzitutto si osserva che il numeratore ha grado inferiore al denominatore, quindi si può procedere con le tecniche illustrate in precedenza. Si ha che $x^2-6x+8 = (x-4)(x-2)$ quindi con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene

$$\frac{3x-4}{(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 4B}{(x-4)(x-2)}$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-4B=-4 \end{cases}$$

e dunque $A=4$ e $B=-1$. Riassumendo si ottiene

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{4}{x-4} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = 4 \log|x-4| - \log|x-2| + C$$

✎ **Esercizio 8.6.23.** Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{3x}{x^3-1} dx$$

Innanzitutto si osserva che il numeratore ha grado inferiore al denominatore, quindi si può procedere con le tecniche illustrate in precedenza. Si ha che $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ e il termine di secondo grado è un cosiddetto "falso quadrato", quindi non è ulteriormente decomponibile. Allora con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene

$$\frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + A-C}{x^3-1}$$

da cui si deduce che

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=3 \\ A-C=0 \end{cases}$$

e dunque $A = 1$, $B = -1$ e $C = 1$. Riassumendo si ottiene

$$\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx = \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx$$

Mentre il primo termine è piuttosto facile da trattare, il secondo integrale richiede un po' di lavoro aggiuntivo. Occupiamoci dunque dell'integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \end{aligned}$$

L'ultimo integrale va trattato attraverso il metodo del completamento del quadrato al fine di potersi ricondurre al caso della primitiva dell'arcotangente di una opportuna funzione. Si ha

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[1 + \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$$

Quindi

$$\frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \sqrt{3} \int \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Allora riassumendo si ha

$$\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx = \log|x - 1| - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$

✎ **Esercizio 8.6.24.** Data la funzione

$$f(x) = \cos x \sqrt{\sin x}$$

trovare la primitiva che si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$

Sia

$$F_C(x) = \int \cos \sqrt{\sin x} dx = \frac{(\sin x)^{3/2}}{3/2} + C$$

la generica primitiva di f al variare di C costante arbitraria. Allora dobbiamo trovare C tale che

$$F_C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

questo porta immediatamente a

$$C = -\frac{2}{3}$$

quindi la primitiva richiesta è

$$F_{-2/3}(x) = \frac{2}{3} [(\sin x)^{3/2} - 1]$$

✎ **Esercizio 8.6.25.** Trovare l'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x}$$

Si ha

$$-\frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x} dx = -\int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = -\log(1 + \sin^2 x) + C$$

quindi

$$f(x) = -\log(1 + \sin^2 x) + C$$

Impongo che $f(0) = 0$ e questo porta immediatamente a $C = 0$ dunque la funzione richiesta è esattamente

$$f(x) = -\log(1 + \sin^2 x)$$

8.7. Applicazioni

Illustriamo qui di seguito, senza pretesa di completezza, alcune applicazioni della teoria del calcolo integrale svolta fino ad ora.

8.7.1. Lunghezza di un grafico

Sia $y = f(x)$ una funzione continua per cui esiste $f'(x)$ in $[a, b]$. Allora la lunghezza del grafico di f tra a e b è dato dalla formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

✎ **Esempio 8.7.1.** Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $y = x^{3/2}$ per $x \in [0, 1]$

Si ha $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ per cui

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1\right]$$

✎ **Esempio 8.7.2.** Determinare la lunghezza della curva $4y = 2 \log x - x^2$ da $x = 1$ a $x = e$

Poniamo

$$f(x) = \frac{1}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

allora si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}x$$

da cui

$$\begin{aligned} L &= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}} dx = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \left|\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right| dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \log x\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

8.7.2. Volume di un solido di rotazione attorno a un asse

Rotazione attorno all'asse x

L'idea è di prendere il sottografico di una funzione in una regione limitata e farlo ruotare attorno all'asse x , generando un solido di rotazione. La regione che ruota è $0 \leq y \leq f(x)$. Si ha


$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Rotazione attorno all'asse y

Anche in questo caso l'idea è di prendere il sottografico di una funzione in una regione limitata e farlo ruotare stavolta attorno all'asse y , generando un solido di rotazione. Si ha

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Attenzione però che la regione che ruota è $0 \leq y \leq f(x)$, quindi se è richiesta la regione complementare bisogna togliere questo volume dal volume del corrispondente cilindro.

 **Esempio 8.7.3.** Determinare il volume della "tazza" ottenuta dalla rotazione attorno all'asse y dell'arco parabolico $y = x^2$ per $0 \leq x \leq 1$.

Siamo proprio nel caso illustrato nell'esempio precedente: infatti stiamo facendo ruotare la regione $x^2 \leq y \leq 1$ e non $0 \leq y \leq x^2$! Quindi il volume richiesto è dato da

$$V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{solidorotazione}} = \pi - 2\pi \int_0^1 x x^2 dx = \pi - 2\pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Alternativamente si poteva procedere

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2) dx = \frac{\pi}{2}$$

8.8. Il concetto di area

Abbiamo visto nell'introduzione che se f è una funzione non negativa, l'area del suo sottografico coincide con l'integrale di f . Invece se f è negativa, l'integrale di f ha segno opposto rispetto all'area del sottografico (che essendo un'area deve essere un numero positivo!). In questo senso si dice che l'integrale è un'AREA CON SEGNO. Quindi occorre fare attenzione alle richieste degli esercizi proposti. Facciamo alcuni esempi che serviranno a chiarire il concetto.

✎ **Esempio 8.8.1.** Calcolare

$$\int_{-1}^2 \text{sign}(x) dx$$

Successivamente calcolare l'area della regione sottesa dalla funzione segno nell'intervallo $[-1, 2]$.

La funzione segno è definita per $x \neq 0$ e vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$. Per qui dovendo calcolare l'integrale si ha

$$\int_{-1}^2 \text{sign}(x) dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^2 1 dx = -1 + 2 = 1$$

Invece per calcolare l'area occorre determinare l'integrale del *valore assoluto* della funzione segno (che è equivalente a cambiare segno agli integrali delle zone dove la funzione è negativa), cioè

$$A = \int_{-1}^2 1 dx = 3$$

✎ **Esempio 8.8.2.** Si calcoli

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

e successivamente si calcoli l'area del sottografico della funzione seno nello stesso intervallo.

Si vede immediatamente che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

perché integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico. Invece l'area del sottografico nello stesso intervallo coincide con l'integrale della funzione $|\sin x|$ in $[-\pi, \pi]$ per cui si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx = [\cos x]_{-\pi}^0 + [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) + -(-1) + 1 = 4$$

Si mediti sulla differenza nei due casi.

✎ **Esempio 8.8.3.** Si calcoli l'area della regione piana R compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{6} & 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

e l'asse delle ascisse.

Osserviamo che se $x \in [0, \pi]$ allora $f(x) \geq 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$ dunque l'area della regione R richiesta è

$$\begin{aligned} R &= \int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} \frac{x^2 + x}{6} dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} \right] + [1 + 1] = \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^2}{12} + 2 \end{aligned}$$

8.9. Integrali generalizzati

Finora abbiamo definito l'integrale $\int_a^b f dx$ solo per funzioni f limitate e definite su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato; ci occuperemo ora del caso in cui una o entrambe queste ipotesi vengono a mancare.

8.9.1. Integrali di funzioni non limitate

Cominciamo con il caso di una funzione $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$; supponiamo per semplicità che f sia continua (dunque integrabile e in particolare limitata) su ogni intervallo del tipo $[a, \beta]$ con $\beta < b$.

L'idea per definire l'integrale di f in $[a, b)$ è quello di integrare tra a e $b - \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$ e poi passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

□ **Definizione 8.9.1.** Se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (8.9.1)$$

diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO O IMPROPRIO) su $[a, b)$ ed il limite (8.9.1) verrà indicato con la scrittura

$$\int_a^b f(x) dx \quad (8.9.2)$$

e diremo che l'integrale (8.9.2) è CONVERGENTE. Se invece il limite (8.9.1) esiste ed è uguale a $+\infty$ [$-\infty$] diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE [[NEGATIVAMENTE]] e scriveremo

$$\int_a^b f(x) dx = +\infty \quad [-\infty].$$

Infine se il limite (8.9.1) non esiste, diremo che l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ NON HA SENSO (O NON ESISTE).

In modo analogo si definisce l'integrabilità generalizzata per le funzioni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continue

(che quindi sono integrabili sugli intervalli del tipo $[\alpha, b]$ per ogni $\alpha > a$), e tali per cui si abbia $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, ponendo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (8.9.3)$$

□ Definizione 8.9.2. Se f è definita su (a, b) ed è integrabile su $[\alpha, \beta]$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$, scelto un punto $c \in (a, b)$, diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO) su (a, b) se essa è integrabile su $(a, c]$ e su $[c, b)$ nel senso delle (8.9.1) e (8.9.3), ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Se uno solo degli integrali $\int_a^c f(x) dx$ o $\int_c^b f(x) dx$ è divergente positivamente [[negativamente]], o se sono entrambi divergenti positivamente [[entrambi divergenti negativamente]], diremo che $\int_a^b f(x) dx$ diverge positivamente [[negativamente]]. In tutti gli altri casi, diremo che $\int_a^b f(x) dx$ non ha senso (o non esiste).

☞ **Osservazione 8.9.3.** Non è difficile vedere che la definizione precedente è ben posta, nel senso che non dipende dal punto c scelto per spezzare l'integrale.

Nel seguito ci limiteremo in generale a trattare l'integrabilità di funzioni f definite su intervalli (o su unioni finite di intervalli) che siano illimitate solo intorno ad un numero finito di punti; in tal caso si divide il dominio di f in tanti sottointervalli in modo che in ciascuno di essi la funzione f risulti illimitata solo intorno ad uno degli estremi, e si richiede che f sia integrabile in senso generalizzato in ognuno di tali sottointervalli, secondo le definizioni precedenti. Se invece l'integrale di f su uno di tali intervalli, o su vari di essi, diverge, ma sempre o positivamente o negativamente, diremo che l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

☞ **Osservazione 8.9.4.** Per gli integrali generalizzati valgono le proprietà di somma, confronto, spezzamento analoghe a quelle viste nelle sezioni precedenti.

☞ **Osservazione 8.9.5.** Avremmo potuto pensare di definire l'integrale di una funzione definita su un intervallo limitato (a, b) senza spezzare l'intervallo, semplicemente considerando il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Tuttavia il risultato di tale operazione è diverso dall'integrale generalizzato, in quanto con questa scelta risulterebbero "integrabili" anche funzioni che non rientrano nella nostra definizione, e non varrebbe più la formula di spezzamento! Ad esempio, è facile verificare che

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x dx$$

non ha senso, mentre

$$\int_{-\pi/2+\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \tan x \, dx = 0$$

per ogni ε , e lo spezzamento in

$$\int_{-\pi/2}^0 \tan x \, dx + \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$$

è la scrittura $(-\infty) + (+\infty)$.

Proposizione 8.9.6. *Se una funzione f è non negativa sull'intervallo $[a, b)$, ed è integrabile su $[a, \beta]$ per ogni $\beta < b$, l'integrale $\int_a^b f(x) \, dx$ esiste; inoltre tale integrale può solo essere o finito oppure divergente positivamente. Lo stesso vale anche per funzioni non positive, oppure per intervalli $(a, b]$, e di conseguenza per intervalli (a, b) .*

Esempio 8.9.7. Consideriamo la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ definita in $(0, 1]$: dato che è positiva, l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ ha sempre senso. Se $\alpha \leq 0$ la funzione risulta integrabile nel senso di Riemann (non serve quello generalizzato); se invece $\alpha > 0$ si ha, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \begin{cases} -\log \varepsilon & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1 - \alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

per cui passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

e che se $\alpha < 1$ l'integrale (generalizzato se $\alpha > 0$) vale $\frac{1}{1 - \alpha}$.

Esempio 8.9.8. Dimostriamo che l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

è convergente.

Dalla definizione si ha

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{1/2} \right]_\varepsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})$$

quindi passando al limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2.$$

8.9.2. Criteri di integrabilità al finito

Siano $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continue con

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$$

I seguenti criteri permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Teorema 8.9.9. CRITERIO DEL CONFRONTO *Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, b)$ allora*

g integrabile $\Rightarrow f$ integrabile

f non integrabile $\Rightarrow g$ non integrabile

Infatti per le proprietà di monotonia dell'integrale si ha

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} g(x) dx$$

e passando al limite si prova la tesi.

Teorema 8.9.10. CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO *Se $f > 0$ e $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow b^-$ allora*

f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile

Tale criterio può essere esteso al caso in cui $f, g \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$ o $f, g \rightarrow -\infty$ (in quest'ultimo caso le disuguaglianze valgono con i moduli).

✎ **Esempio 8.9.11.** *Si calcoli l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} dx$$

Si ha che per $x \rightarrow 0$

$$\frac{e^x}{\sqrt[4]{x^3} \cos^2 x} \sim \frac{1}{x^{3/4}}$$


Quindi l'integrale dato si comporta, dal criterio del confronto asintotico, come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}} dx$$

che come abbiamo visto in un esempio precedente converge perché $3/4 < 1$

Teorema 8.9.12.

$$\int_a^b |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x) < +\infty$$

 **Esempio 8.9.13.** Si calcoli

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Dal teorema precedente proviamo a studiare l'integrabilità di

$$\int_0^1 \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$$

siccome la funzione integranda è positiva adesso, possiamo usare ad esempio il criterio del confronto e maggiorare l'integrale precedente con

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

che converge, quindi anche l'integrale di partenza converge.

8.9.3. Integrazione su intervalli illimitati

Sia $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_a^{\omega} f(x) dx$$

□ Definizione 8.9.14. Se il limite precedente esiste finito, allora f si dice INTEGRABILE IN $[a, +\infty)$ oppure si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ È CONVERGENTE. Se il precedente limite è uguale a $+\infty$ $[-\infty]$ diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE $[[\text{NEGATIVAMENTE}]]$. Infine in tutti gli altri casi diremo che L'INTEGRALE GENERALIZZATO NON ESISTE.

Analogamente se $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^b f(x) dx$$

ed infine se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

✎ **Esempio 8.9.15.** La funzione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, definita in $[1, +\infty)$, ha evidentemente integrale divergente positivamente se $\alpha \leq 0$ (infatti avremmo $f(x) \geq 1$ per ogni x); se invece è $\alpha > 0$, si ha per ogni $y > 1$

$$\int_1^y \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \log y & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{y^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \rightarrow +\infty$, si ottiene che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1,$$

e che se $\alpha > 1$, l'integrale generalizzato vale $\frac{1}{\alpha - 1}$.

✎ **Osservazione 8.9.16.** Da quanto detto finora si deduce che per ogni numero reale α si ha $\int_0^{+\infty} x^\alpha dx = +\infty$; inoltre, operando la sostituzione $x - x_0 = t$ si ricava che la funzione $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ è integrabile in un intorno di x_0 se e solo se $\alpha > -1$ mentre è integrabile in un intorno di $-\infty$ o di $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$. Va osservato inoltre che l'integrale $\int_{-1}^1 (1/x) dx$ non esiste in quanto, come visto nell'esempio precedente, si ha

$$\int_{-1}^0 x^{-1} dx = -\infty \quad \int_0^1 x^{-1} dx = +\infty.$$

Bisogna stare attenti a non farsi indurre in errore dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha (essendo la funzione x^{-1} dispari)

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} x^{-1} dx + \int_{\varepsilon}^1 x^{-1} dx = 0,$$

oppure a non applicare con troppa disinvoltura il teorema fondamentale del calcolo integrale, concludendo che

$$\int_{-1}^1 x^{-1} dx = [\log |x|]_{-1}^1 = 0.$$

✎ **Esempio 8.9.17.** Vediamo se esiste

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

La funzione $1/\sqrt{|x|}$ è illimitata per $x \rightarrow 0$. Suddividiamo allora l'intervallo $(-1, +1)$ nei due intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (-2\sqrt{\delta} + 2) = 2$$

e

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{\sigma}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\sigma}) = 2.$$

Quindi l'integrale $\int_{-1}^1 (1/\sqrt{|x|}) dx$ esiste e vale 4.

Si osservi che si sarebbe ottenuto lo stesso risultato calcolando

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\sigma}^1.$$

In generale, se ad esempio, una funzione f è definita e continua nell'intervallo $[-1, +1]$ privato del solo punto 0, la definizione data sopra equivale alla richiesta dell'esistenza del limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-1}^{-\delta} f(x) dx + \int_{\sigma}^1 f(x) dx \right\},$$

limite inteso nel senso della teoria delle funzioni di due variabili. Non è la stessa cosa far tendere δ e σ a zero ponendo fra loro un legame (ad esempio ponendo $\delta = \sigma$).

8.9.4. Criteri di integrabilità all'infinito

Siano $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Anche in questo caso valgono analoghi criteri che permettono di decidere se un integrale è convergente o divergente senza calcolarlo.

Teorema 8.9.18. CRITERIO DEL CONFRONTO Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty)$ allora

g integrabile $\Rightarrow f$ integrabile

f non integrabile $\Rightarrow g$ non integrabile

Teorema 8.9.19. CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO Se $f > 0$ e $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \rightarrow +\infty$ allora

f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile

Teorema 8.9.20.

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) < +\infty$$

☞ **Esempio 8.9.21.** Se consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x \log^\beta x)$, definita in $[e, +\infty)$ (con $\beta > 0$), si ha che f è positiva, e per ogni $y > e$

$$\int_e^y f(x) dx = \begin{cases} \log \log y & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{(\log y)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{se } \beta \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \rightarrow +\infty$, si ottiene che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1,$$

e che se $\beta > 1$ l'integrale generalizzato vale $1/(\beta - 1)$.

☞ **Osservazione 8.9.22.** Non è difficile mostrare che se una funzione f è integrabile (in senso generalizzato) secondo Riemann, anche $|f|$ lo è. Invece una funzione f può avere integrale generalizzato senza che lo abbia la funzione $|f|$, come mostra il seguente esempio. Si parla allora, in analogia con le serie, di funzioni integrabili, ma non assolutamente integrabili. Le funzioni che sono assolutamente integrabili in senso generalizzato hanno particolari proprietà (così come nell'ambito delle serie le serie assolutamente convergenti). Ciò risulterà chiaro quando si constaterà che solo le funzioni assolutamente integrabili sono integrabili secondo Lebesgue (o sommabili).

☞ **Esempio 8.9.23.** Mostriamo che esiste l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

mentre non esiste l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

La prima affermazione equivale a dimostrare l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_{\pi/2}^c \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi/2}^c - \int_{\pi/2}^c \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{\cos c}{c} - \int_{\pi/2}^c \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Ora l'integrale improprio

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

esiste, essendo

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Si ricava allora:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Quanto alla seconda affermazione, si ha per n intero positivo:

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \sum_{k=1}^n \frac{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Poiché la serie armonica diverge, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

Esempio 8.9.24. Dato x un numero reale, sia $[x]$ la sua parte intera, cioè il massimo intero minore o uguale a x . Fissato un numero $\alpha > 0$, la somma parziale della serie armonica generalizzata di esponente α si può rappresentare come:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{1}{[x]^\alpha} dx,$$

e si verifica facilmente che la convergenza della serie equivale all'esistenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} (1/[x]^\alpha) dx$. Poiché la funzione $1/[x]^\alpha$, generalmente continua in ogni intervallo limitato, ha ordine di infinitesimo α , è evidente che l'integrale esiste per $\alpha > 1$ e non esiste per $\alpha \leq 1$. Analogamente si procede per la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$.

8.10. Esercizi proposti

Esercizio 8.10.1. Si discuta la convergenza del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-2|} dx$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-2|} dx &= \int_{-\infty}^2 e^{-2+x} dx + \int_2^{+\infty} e^{-x+2} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^2 e^{-2+x} dx + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_2^{\omega} e^{-x+2} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} e^{-2}[e^x]_{\omega}^2 + \lim_{\omega \rightarrow +\infty} e^2[-e^{-x}]_2^{\omega} = 1 + e^4 \end{aligned}$$

quindi l'integrale proposto converge.

Esercizio 8.10.2. Si discuta la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di zero la funzione integranda è ben definita e continua). Proviamo a vedere se c'è convergenza assoluta. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2 + 1} \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

Questo integrale converge perché

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

e il primo è un integrale non generalizzato (quindi converge); il secondo converge dal criterio del confronto asintotico con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$. Si noti che non si poteva applicare direttamente il criterio del confronto asintotico con l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ perché quest'ultimo diverge! (in quanto diverge $\int_0^1 1/x^2 dx$). Quindi è sempre bene prestare attenzione agli estremi di integrazione.

✎ **Esercizio 8.10.3.** Si discuta la convergenza del seguente integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1 - \sin x}{x^2 \log(\sqrt{x} + 1)} dx$$

Anche in questo caso l'unico problema è in un intorno di $+\infty$. L'idea è quella di usare un criterio del confronto per mostrare che ci sia convergenza. Si ha

$$0 \leq 1 - \sin x \leq 2$$

e d'altra parte siccome $x > 3$ si ha

$$\sqrt{x} + 1 > \sqrt{3} + 1 > e$$

dunque dalla monotonia del logaritmo (attenzione al verso della disuguaglianza!)

$$\log(\sqrt{x} + 1) > \log e = 1$$

quindi

$$\frac{1}{\log(\sqrt{x} + 1)} < 1$$

e dunque

$$\frac{1 - \sin x}{x^2 \log(\sqrt{x} + 1)} < \frac{1}{x^2}$$

A questo punto, dal teorema del confronto, siccome

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

anche l'integrale di partenza converge.

✎ **Esercizio 8.10.4.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{(1 + e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1 + x\sqrt{x}) + 1 - \cos x}$$

Si studi l'integrabilità di f sul suo dominio di definizione.

La funzione f è ben definita e positiva per $x > 0$. Infatti il numeratore è ben definito se $x \leq -1$ o $x \geq 0$ mentre il denominatore solo per $x > 0$ quindi il dominio di f è $(0, +\infty)$. Siccome f è

continua, allora f è integrabile su ogni intervallo del tipo $[\alpha, \beta]$ con $0 < \alpha < \beta < \infty$. Quindi occorre studiare solamente l'integrabilità in un intorno di 0 e in un intorno di $+\infty$.

Sia $x \rightarrow 0^+$. Allora si ha

$$(1 + e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)} \sim 2\sqrt{x^3} = 2x^{3/2}$$

mentre

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

dunque

$$x^2(1 + x\sqrt{x}) + 1 - \cos x \sim \frac{3}{2}x^2.$$

Allora

$$f(x) \sim \frac{4}{3\sqrt{x}} \quad x \rightarrow 0^+$$

quindi dal criterio del confronto asintotico f è integrabile in un intorno di zero.

Studiamo ora l'integrabilità all'infinito. Se $x \rightarrow +\infty$ si vede facilmente che

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^3\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

e di nuovo dal criterio del confronto asintotico f è integrabile anche in un intorno di infinito.

Concludendo dunque f è integrabile su tutto il suo dominio $(0, +\infty)$.

✎ **Esercizio 8.10.5.** Calcolare l'insieme dei valori β per cui l'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} \frac{3^x}{x^\beta} dx$$

converge.

L'idea è che l'integrale proposto diverga sempre in quanto all'infinito gli esponenziali hanno un comportamento dominante rispetto alle potenze, di qualunque esponente. Ora cerchiamo di dimostrare questa idea in maniera rigorosa.

Noi sappiamo che

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$$

converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$.

Siccome $3^x \geq 1$ allora di sicuro se $\beta \leq 1$ si ha

$$\int_3^{+\infty} \frac{3^x}{x^\beta} dx \geq \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$$

e quest'ultimo integrale diverge, per quanto detto sopra, quindi dal criterio del confronto, si ha che per $\beta \leq 1$ anche l'integrale di partenza diverge.

Rimane da studiare il caso $\beta > 1$. In questo caso possiamo sfruttare la seguente idea:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{1}{x^\beta} = +\infty$$

quindi definitivamente

$$\frac{3^x}{x^\beta} \geq 2^x$$

e pertanto l'integrale di partenza diverge anche per $\beta > 1$ dal teorema del confronto.

✎ **Esercizio 8.10.6.** Calcolare l'insieme dei valori β per cui l'integrale improprio

$$\int_3^4 \frac{\log(x-2)}{(x-3)^\beta} dx$$

converge.

Si può effettuare un cambio di variabile, in modo da ridursi a un problema nell'intorno di zero. Ponendo $x - 3 = t$ si ottiene che l'integrale di partenza è equivalente al seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t^\beta} dt$$

che per il criterio del confronto asintotico si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-1}} dt$$

e pertanto converge se $\beta - 1 < 1$ cioè $\beta < 2$.

✎ **Esercizio 8.10.7.** Si discuta la convergenza del seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

Primo modo: il problema si ha in un intorno di zero, ma per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\sqrt{x}(1+x) \sim \sqrt{x}$$

e quindi, dal criterio del confronto asintotico, si ha che l'integrale di partenza si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

che converge.

Secondo modo: Si osserva che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2 \arctan \sqrt{x}]_\varepsilon^1 = \frac{\pi}{2}$$

quindi non solo si ha convergenza ma si ha anche la fortuna di calcolare l'espressione esplicita dell'integrale.

✎ **Esercizio 8.10.8.** Calcolare l'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{4x + x^3}{\sin^2(x^\beta)} dx$$

è integrabile in senso improprio e come integrale improprio è convergente

Il problema è in un intorno di zero. Quindi se $x \rightarrow 0^+$ allora

$$\frac{4x + x^3}{\sin^2(x^\beta)} \sim \frac{4x + x^3}{x^{2\beta}} \sim 4x^{1-2\beta} = \frac{4}{x^{2\beta-1}}$$

quindi questo integrale (e perciò anche quello di partenza) converge se $2\beta - 1 < 1$ cioè se $\beta < 1$. D'altra parte l'esercizio richiede che l'integrale sia anche improprio (non dimenticarsi di svolgere questa parte!) quindi occorre che $2\beta - 1 > 0$. Allora la soluzione finale è

$$\frac{1}{2} < \beta < 1.$$

✎ **Esercizio 8.10.9.** Calcolare l'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x) - x}{(e^x - 1)x^\beta} dx$$

è integrabile in senso improprio e come integrale improprio è convergente

Si ha che il problema di nuovo è in un intorno di zero. Dunque se $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{\log(1+x) - x}{(e^x - 1)x^\beta} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{e^x - 1}{x} x^{\beta+1}} \sim \frac{1}{2x^{\beta-1}}$$

quindi per avere un integrale improprio e che sia anche convergente deve essere

$$0 < \beta - 1 < 1$$

da cui

$$1 < \beta < 2.$$

✎ **Esercizio 8.10.10.** Calcolare l'insieme dei valori del parametro $\beta > 0$ per cui l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{(x+1)^\beta} dx$$

è integrabile in senso improprio e come integrale improprio è convergente

Stavolta il problema è in un intorno di $+\infty$ (prestare sempre attenzione agli estremi di integrazione!) Dunque se $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{3x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{(x+1)^\beta} \sim 3 \frac{\frac{\sin(1/x)}{1/x}}{(x+1)^\beta} \sim \frac{3}{x^\beta}$$

quindi per avere un integrale improprio e che sia anche convergente deve essere

$$\beta > 0 \quad \wedge \quad \beta > 1$$

(perché il problema è in un intorno di $+\infty$!) quindi

$$\beta > 1.$$

✎ **Esercizio 8.10.11.** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n^2}^{n^3} \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Siccome $n^2 \leq x \leq n^3$ e (visto che si studia la convergenza della serie) $n \rightarrow +\infty$, allora per confronto anche $x \rightarrow +\infty$ e dunque $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$. Pertanto si possono usare i limiti notevoli e avere che

$$\sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$$

Allora dal criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati, l'integrale

$$\int_{n^2}^{n^3} \sin^2\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

si comporta come l'integrale (che sappiamo calcolare esplicitamente!)

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{n^2}^{n^3} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} = \frac{n-1}{n^3}$$

Pertanto dal criterio del confronto asintotico per le serie, la serie di partenza si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3}$$

che a sua volta, di nuovo dal confronto asintotico, si comporta come $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge. Allora anche la serie di partenza converge.

✎ **Esercizio 8.10.12.** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) dx$$

Prima di tutto osserviamo che $0 \leq x \leq 1/n$ e siccome stiamo considerando la serie, $n \rightarrow \infty$ quindi $1/n \rightarrow 0$ e pertanto anche $x \rightarrow 0$. Allora possiamo usare gli sviluppi di Taylor per concludere che dal fatto

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

si ottiene

$$\frac{\sin x}{x} - 1 \sim -\frac{x^2}{6}$$

Allora la serie di partenza, dal criterio del confronto asintotico per serie (e quello per gli integrali) si comporta come (non è restrittivo tralasciare le costanti e il segno meno) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{1/n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^3}$$

che converge, dunque anch'essa converge.

8.10.1. Funzioni integrali

Sia f una funzione integrabile (anche in senso generalizzato). Consideriamo l'integrale di f su un intervallo che varia; quindi un estremo lo terremo fissato, per esempio x_0 e l'altro lo lasciamo variabile. Quindi la primitiva di f diventa una funzione di x . Nello specifico si ha la seguente definizione.

□ **Definizione 8.10.13.** La funzione $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ si chiama **FUNZIONE INTEGRALE** di f

Vale il seguente importantissimo teorema.

Teorema 8.10.14. SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato). Sia $x_0 \in [a, b]$ e

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Allora si ha che:

- 1) la funzione F è continua in $[a, b]$
- 2) Se inoltre f è continua in $[a, b]$ allora F è derivabile in $[a, b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

☞ **Osservazione 8.10.15.** Si osserva che F ha sempre un grado di regolarità maggiore rispetto a f . Inoltre il teorema ci dice che ogni funzione continua ammette primitiva (che è la sua funzione integrale).

🔗 **Esercizio 8.10.16.** Si studi la funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Come abbiamo accennato, questo integrale non è esprimibile in termini di funzioni elementari, quindi $F(x)$ non può essere ulteriormente esplicitabile. Studiamola come studieremmo un normale studio di funzione. Si ha $F(0) = 0$ banalmente e inoltre $F'(x) = e^{-x^2}$ dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Inoltre, attraverso un cambio di variabile

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-s^2} ds = -F(x)$$

quindi F è dispari. Si nota che $F' > 0$ quindi F è crescente su \mathbb{R} . Pertanto ammette limite agli estremi del dominio, quindi esiste il limite per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$. Chiamiamo λ il limite a $+\infty$, cioè sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lambda.$$

Dall'ultimo paragrafo del capitolo si riesce anche a determinare esplicitamente $\lambda = \sqrt{\pi}/2$. Inoltre $F''(x) = -2xe^{-x^2}$ quindi la funzione è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$. La funzione data ha dunque un andamento simile all'arcotangente (con diversi valori degli asintoti orizzontali).

🔗 **Esercizio 8.10.17.** Indicata con f la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)}$$

Prima di tutto si ha $f(0) = 0$ quindi il limite richiesto si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Pertanto proviamo ad utilizzare il teorema di de l'Hospital. Calcoliamo a parte, utilizzando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \frac{d}{dx}[f(2x)] = 2 \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2x}{x}$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) - 2f'(2x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$$

che si presenta di nuovo nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Riapplicando di nuovo il teorema di de l'Hospital si ottiene stavolta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x - \sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} = 2$$

perché

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1) + 2 - 2 \cos(2x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 + 2 \frac{1 - \cos(2x)}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -2 + 2 \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} \frac{4x^2}{1 - \cos x} = 2 \end{aligned}$$

quindi anche il limite di partenza esiste e vale 2.

✎ **Esercizio 8.10.18.** Calcolare la derivata di

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Poniamo

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Allora, dalla formula di spezzamento, si vede chiaramente che

$$G(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = F(2x) - F(x)$$

quindi dalla formula di derivazione delle funzioni composte e dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2 \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 2x - \sin x}{x} = \sin x \frac{2 \cos x - 1}{x}$$

✎ **Esercizio 8.10.19.** Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin fino all'ordine 2 di

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Lo sviluppo richiesto è

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

quindi si tratta di determinare i coefficienti dello sviluppo. Si ha chiaramente $F(0) = 0$. Inoltre dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dall'esercizio precedente si ha

$$F'(x) = \frac{\sin 2x - \sin x}{x}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1$$

Infine dalla formula di derivazione di un quoziente

$$F''(x) = \frac{[2 \cos(2x) - \cos x]x - (\sin 2x - \sin x)}{x^2}$$

a questo punto occorre calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} F''(x)$$

che siccome si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, si prova a trattarlo con il teorema di de l'Hospital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} F''(x) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 4x \sin 2x - \cos x + x \sin x - 2 \cos 2x + \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 4 \sin 2x}{2}$$

che quindi vale 0. Concludendo, lo sviluppo richiesto è

$$F(x) = x + o(x^2).$$

✎ **Esercizio 8.10.20.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t) dt}{x(x^2 - \sin^2 x)}$$

Il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Proviamo ad utilizzare il teorema di de l'Hospital. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t) dt}{x(x^2 - \sin^2 x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2} - \sin^2 x}{3x^2 - \sin^2 x - x \sin 2x}$$

A questo punto proviamo ad utilizzare i limiti notevoli. Ricordando che si ha, per $z \rightarrow 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3)$$

allora (se pensiamo di fermarci per esempio all'ordine 4)

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \sin^2 x = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right]^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Inoltre

$$x \sin 2x = x \left[2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) \right] = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

quindi riassumendo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x (e^{-t^2} + \sin^2 t) dt}{x(x^2 - \sin^2 x)} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2} - \sin^2 x}{3x^2 - \sin^2 x - x \sin 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{3x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{5}{3} + o(1)} \\ &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

8.11. Riassumendo

Dire se le seguenti implicazioni sono vere o false.

Ogni funzione limitata su \mathbb{R} ammette una primitiva.

Falso: controesempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

Ogni funzione continua su \mathbb{R} ammette una primitiva.

Vero: è la funzione integrale.

Le funzioni primitive sono tutte continue.

Vero: secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Esistono funzioni primitive discontinue

Falso: dal punto precedente.

Ogni funzione integrabile su \mathbb{R} è limitata.

Falso: controesempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ e } x \geq 1 \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 3 & \text{se } \frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4} \\ \vdots & \\ n & \text{se } \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \\ \vdots & \end{cases}$$

In tal caso infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

che converge dal criterio del rapporto. Quindi la funzione data è integrabile su \mathbb{R} ma non è ovviamente limitata.

Ogni funzione limitata su \mathbb{R} è integrabile.

Falso: controesempio: la funzione di Dirichlet.

Ogni funzione continua su $[0, 1]$ è integrabile.

Vero.

Ogni funzione integrabile su \mathbb{R} tende a zero se $x \rightarrow +\infty$.

Falso. controesempio: sia s_n la successione delle somme parziali per una qualunque serie convergente (per esempio $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ con $a_k = \frac{1}{2^k}$). Allora si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq x < n + \frac{1}{2^n}, n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In tal caso infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \frac{1}{2^n}$$

che converge (serie geometrica). Quindi la funzione data è integrabile su \mathbb{R} ma non tende a zero se $x \rightarrow +\infty$ (oscilla tra i valori 0 e 1).


Ogni funzione continua e integrabile su \mathbb{R} tende a zero se $|x| \rightarrow +\infty$.

Falso. Il controesempio però è tutt'altro che banale. Nell'esempio precedente l'idea era di costruire una funzione che valeva 1 su una serie di segmenti la cui somma dava una serie geometrica. Naturalmente si trattava di una funzione discontinua. Ora l'idea è di costruire triangoli di base che si riduce in proporzione (per esempio) sempre a una serie geometrica e di altezza fissata uguale a 1 (pensiamo di costruire una funzione pari così per $x < 0$ si costruisce in modo simmetrico). In tal caso la funzione non può tendere a zero perché le altezze dei triangoli sono sempre 1 ma l'integrale è la somma delle aree dei triangoli che (a meno di un fattore 1/2)

sono date dalla somma delle basi (per altezza che fa 1) che vengono apposta prese come serie convergente. In formule si ha, se $x \geq 0$ (e simmetricamente per $x < 0$)

$$f(x) = \begin{cases} 2^{n+1}(x-n) & \text{se } n \leq x < n + \frac{1}{2^{n+1}}, n > 1 \\ -2^{n+1}\left(x - n - \frac{1}{2^n}\right) & \text{se } n + \frac{1}{2^{n+1}} \leq x < n + \frac{1}{2^n}, n > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

8.12. Complementi

 **Esempio 8.12.1.** (FORMULA DI WALLIS PER π) Si dimostri, integrando per parti, la relazione:

$$\int_0^\pi (\sin x)^m dx = \frac{m-1}{m} \int_0^\pi (\sin x)^{m-2} dx.$$

Da questa si ricava:

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2r} dx = \frac{(2r-1)}{2r} \frac{(2r-3)}{(2r-2)} \dots \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \int_0^\pi dx = \frac{(2r-1)!!}{2r!!} \pi,$$

dove il simbolo $k!!$ (che si legge semifattoriale) indica il prodotto degli interi positivi non superiori a k , e della stessa parità di k .

Per m dispari, con $m = 2r + 1$, si ottiene analogamente:

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2r+1} dx = \frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} 2.$$

Teniamo ora presente che si ha in $[0, \pi]$:

$$(\sin x)^{2r+1} \leq (\sin x)^{2r} \leq (\sin x)^{2r-1},$$

dove il segno di eguaglianza vale solo negli estremi. Perciò integrando in $[0, \pi]$ si ha:

$$\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} 2 < \frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} \pi < \frac{(2r-2)!!}{(2r-1)!!} 2.$$

Perciò

$$\left[\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!} \right]^2 \frac{1}{r+1/2} < \pi < \left[\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!} \right]^2 \frac{1}{r},$$

da questa relazione si ricava

$$\pi = \left[\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!} \right]^2 \frac{1}{r+\theta_r} \quad \text{essendo } 0 < \theta_r < \frac{1}{2}. \quad (8.12.1)$$

Da questa, poiché è evidentemente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{r + \theta_r} = 1,$$

si ricava la classica formula di Wallis:

$$\pi = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{(2r)!!}{(2r-1)!!} \right]^2 \frac{1}{r}.$$

Dalla (8.12.1) si può anche ottenere


$$\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{r + \theta_r}} \quad \text{essendo } 0 < \theta_r < \frac{1}{2},$$

e infine,

$$\frac{(2r-1)!!}{(2r)!!} = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} + O(r^{-3/2}).$$

Sempre dalla (8.12.1) si deduce analogamente

$$\frac{(2r)!!}{(2r+1)!!} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{r}} + O(r^{-3/2}).$$

 **Esempio 8.12.2.** Ci proponiamo di calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Per ogni $t \geq 0$ vale la disuguaglianza $1 - t \leq e^{-t} \leq 1/(1+t)$. Facendo $t = x^2$, si ha $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1/(1+x^2)$. Da questa si ricava facilmente la seguente disuguaglianza, valida per qualsiasi intero positivo m :

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^m dx < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mx^2} dx < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m} dx.$$

Il primo e l'ultimo integrale si valutano facilmente. Per il primo si ha, ponendo $x = \cos \theta$ e ricordando l'esempio precedente

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^m dx = \int_0^\pi (\sin \theta)^{2m+1} d\theta = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} 2 = \sqrt{\frac{\pi}{m}} + O(m^{-3/2}).$$

Si ha poi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = \frac{(2m-3)!!}{(2m-2)!!} \pi = \sqrt{\frac{\pi}{m-1}} + O(m^{-3/2}) = \sqrt{\frac{\pi}{m}} + O(m^{-3/2}).$$

Si deduce allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}} + O(m^{-3/2}).$$

D'altra parte si ha, per ogni intero positivo m , ponendo $t = \sqrt{m}x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-mx^2} dx = \sqrt{\pi} + O(m^{-1}).$$

Poiché in questa relazione m può essere arbitrario, facendo tendere m all'infinito, si conclude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

CAPITOLO 9

Equazioni differenziali

9.1. Modelli differenziali

Dalla fisica sappiamo che se denotiamo con $x(t)$ la posizione di una particella che si muove all'istante t , allora la sua derivata prima $x'(t)$ esprime la velocità della particella in quell'istante e la sua derivata seconda $x''(t)$ esprime l'accelerazione. Quindi quando andiamo a tradurre matematicamente le leggi che governano modelli naturali può essere naturale dover lavorare con equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate. Queste equazioni prendono il nome di *equazioni differenziali*.

✎ **Esempio 9.1.1.** *La seconda legge del moto di Newton $F = ma$, che stabilisce la posizione $x(t)$ al tempo t di un corpo di massa m costante, soggetto a una forza $F(t)$, deve soddisfare l'equazione differenziale*

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \quad \text{equazione del moto.}$$

Quindi le equazioni differenziali (spesso useremo l'acronimo ED per indicare un'equazione differenziale) nascono in maniera naturale per modellizzare fenomeni che hanno origine in molti contesti della fisica. Possono essere classificate in modi diversi. Abbiamo infatti:


1) EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO) se vengono coinvolte solo le derivate rispetto a una sola variabile oppure EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI (EDP) se vengono coinvolte derivate parziali dell'incognita rispetto a più di una variabile.

✎ **Esempio 9.1.2.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

rappresenta l'EQUAZIONE DELLE ONDE che modella lo spostamento trasversale $u(x, t)$ nel punto x al tempo t di una corda tesa che può vibrare.

2) classificazione in base all'ORDINE: l'ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

 **Esempio 9.1.3.** L'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t y^3 - \cos y = \sin t \quad \text{è di ordine 2}$$

mentre l'equazione

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2t \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = y \frac{d^2y}{dt^2} - e^t \quad \text{è di ordine 3.}$$

Possiamo dunque formalizzare i concetti finora introdotti attraverso la seguente definizione.

\square **Definizione 9.1.4.** Si dice EQUAZIONE DIFFERENZIALE di ordine n un'equazione del tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (9.1.1)$$


dove $y(t)$ è la funzione incognita e F è una funzione assegnata delle $n + 2$ variabili $t, y, y', \dots, y^{(n)}$ a valori reali.

Si dice ORDINE di un'equazione differenziale l'ordine massimo di derivazione che vi compare.

Si dice SOLUZIONE (O CURVA INTEGRALE) della (9.1.1) nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione φ , definita almeno in I e a valori reali per cui risulti

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Infine si dice INTEGRALE GENERALE dell'equazione (9.1.1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (9.1.1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

 **Esempio 9.1.5.** Consideriamo una popolazione di individui, animali o vegetali che siano, e sia $N(t)$ il numero degli individui. Osserviamo che N è funzione di del tempo t , assume solo valori interi ed è a priori una funzione discontinua di t ; tuttavia può essere approssimata da una funzione continua e derivabile purché il numero degli individui sia abbastanza grande.

Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti.

Se escludiamo i casi di morte, immigrazione, emigrazione, allora il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e se indichiamo con λ il tasso specifico di natalità (i.e. il numero di nati per unità di tempo) l'equazione che descrive il modello diventa

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t).$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione compare anche in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

✎ **Esempio 9.1.6.** Consideriamo il caso della crescita di una cellula e sia $p(t)$ il peso della cellula in funzione del tempo t . Supponendo che la crescita non sia influenzata da fattori esterni, è ragionevole pensare che in un piccolo intervallo di tempo l'accrescimento della cellula sia proporzionale al tempo trascorso e al peso della cellula all'istante t . Quindi se denotiamo con t e $t + h$ due istanti successivi, esiste una costante k tale che

$$p(t + h) - p(t) = k h p(t).$$

La relazione è tanto più precisa quanto più h è piccolo, quindi passando al limite per $h \rightarrow 0$ si ottiene

$$\dot{p}(t) = k p(t).$$

Quindi l'equazione modello in entrambi gli esempi proposti è

$$\dot{y} = k y.$$

Sono regolati dalla medesima equazione il processo di disgregazione radioattiva, quello relativo alla reazione di un tessuto vivente esposto a radiazioni ionizzanti e anche la reazione chimica di alcune sostanze.

✎ **Esempio 9.1.7.** Studiamo ora il modello di crescita (dovuto a Malthus, 1978) relativo all'evoluzione di una popolazione isolata in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse. In questo caso l'equazione che si ottiene è la seguente

$$\dot{N}(t) = (\lambda - \mu)N(t),$$

dove come prima λ è il tasso di natalità mentre μ è il tasso di mortalità (cioè rispettivamente il numero di nati e morti nell'unità di tempo). Il numero $\varepsilon = \lambda - \mu$ è detto POTENZIALE BIOLOGICO.

Ci chiediamo ora come possiamo trovare una soluzione del problema studiato nell'Esempio 9.1.7. Supponiamo per il momento che sia $N \neq 0$. Allora

$$\dot{N} = \varepsilon N \Rightarrow \frac{\dot{N}}{N} = \varepsilon \Rightarrow \frac{d}{dt}(\log |N|) = \varepsilon,$$

da cui

$$\log(|N(t)|) = \varepsilon t + c_1 \Rightarrow |N(t)| = e^{c_1} e^{\varepsilon t} =: k^2 e^{\varepsilon t}$$

dove abbiamo posto $e^{c_1} =: k^2 > 0$ costante positiva e arbitraria. A questo punto allora

$$N(t) = \pm k^2 e^{\varepsilon t}$$

quindi possiamo senz'altro dire che

$$N(t) = C e^{\varepsilon t} \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tutto questo vale se $N \neq 0$; ma è banale verificare che anche $N = 0$ soddisfa l'equazione di partenza, quindi possiamo dire che l'integrale generale è

$$N(t) = C e^{\varepsilon t} = C e^{(\lambda - \mu)t} \quad C \in \mathbb{R}.$$

In particolare dall'ultima riga leggiamo che:

- 1) se $\lambda > \mu$ prevale il tasso di natalità e quindi la popolazione aumenta in modo esponenziale;
- 2) se $\lambda < \mu$ prevale invece il tasso di mortalità e quindi la popolazione diminuisce fino ad estinguersi;
- 3) se $\lambda = \mu$ infine la popolazione rimane stabile nel tempo.

Osserviamo in particolare che non abbiamo trovato solo una soluzione, ma infinite soluzioni, dipendenti da una costante arbitraria.

☞ **Osservazione 9.1.8.** È bene rimarcare che nessun organismo e nessuna popolazione cresce indefinitamente nel tempo; ci sono infatti limiti posti dalla scarsità di cibo o di alloggio o da cause fisiche e oggettive...quindi per considerare un modello più attendibile occorrerebbe apportare ulteriori modifiche al modello stesso; questo è quanto è stato fatto nel corso degli anni da studiosi della dinamica delle popolazioni.

9.2. Equazioni differenziali del primo ordine

9.2.1. Generalità

Soffermiamo ora la nostra attenzione sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Esse sono della forma

$$F(t, y, y') = 0 \tag{9.2.1}$$

con F funzione assegnata di t, y, y' a valori reali.

☞ **Esempio 9.2.1.** La ricerca delle primitive di una funzione f continua su un intervallo I equivale a risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ che ammette infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = \int f(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni di una ED ordinaria del primo ordine è costituito da una famiglia di funzioni dipendente da un parametro c : $t \mapsto \varphi(t; c)$. Tale famiglia prende il nome di INTEGRALE GENERALE dell'equazione.

La condizione supplementare $y(t_0) = y_0$ permette, in generale, di selezionare una SOLUZIONE PARTICOLARE.

□ **Definizione 9.2.2.** Il problema di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (9.2.2)$$

prende il nome di PROBLEMA DI CAUCHY.

□ **Definizione 9.2.3.** Quando l'equazione (9.2.1) si presenta nella forma

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (9.2.3)$$

si dice che è in FORMA NORMALE.

Per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto larghe ipotesi, che il problema di Cauchy (9.2.2) ammette un'unica soluzione almeno localmente (cioè per valori di t intorno a t_0).

☞ **Osservazione 9.2.4.** Le soluzioni dell'ED espresse dall'integrale generale potrebbero talvolta essere definite su insiemi diversi a seconda del valore della costante o anche su insiemi più complicati di un intervallo (es. $t \neq 0$). Tuttavia quando parleremo di soluzione del problema di Cauchy andremo sempre a intendere una funzione che:

- a) è definita su un intervallo I contenente il punto t_0 in cui è assegnata la condizione iniziale;
- b) è derivabile in tutto l'intervallo I e soddisfa l'equazione in tutto I .

📎 **Esempio 9.2.5.** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} N'(t) = 3N(t) \\ N(0) = 7 \end{cases}$$

ammette, per quanto visto nel paragrafo precedente, un'unica soluzione data da $N(t) = ce^{3t}$. Imponendo il dato di Cauchy si ottiene $N(0) = c = 7$ da cui la soluzione è $N(t) = 7e^{3t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\forall t \in \mathbb{R}^+$ se t ha il significato di tempo per cui il problema di Cauchy proposto considera un'evoluzione temporale di un fenomeno biologico).

9.2.2. Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono una particolare classe di ED ordinarie del primo ordine del tipo (9.2.3) che sono caratterizzate dalla presenza di una funzione f prodotto di due funzioni, una della sola variabile t e l'altra solo dell'incognita y . Più nel dettaglio, sono equazioni del tipo

$$y' = a(t)b(y) \quad (9.2.4)$$

con a funzione continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e b funzione continua su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Obiettivo di questo paragrafo è la determinazione dell'integrale generale per un'equazione di questo tipo.

Distinguiamo due casi:

a) Se \bar{y} è soluzione dell'equazione $b(\bar{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(t) = \bar{y}$ è una soluzione dell'ED (9.2.4). Infatti in tal caso il secondo membro della (9.2.4) si annulla e anche il primo membro di annulla (perché la derivata della funzione costante è zero).

b) Supponiamo ora che $b(y) \neq 0$. Allora la (9.2.4) si può riscrivere nella forma

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$$

quindi un'ipotetica soluzione soddisfa l'identità

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t).$$

Prendendo gli integrali indefiniti di entrambi i membri si ottiene

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + C$$

con C costante arbitraria. Adesso a primo membro si effettua il cambio di variabile $y = y(t)$ da cui si ha $dy = y'(t) dt$ e dunque

$$\int \frac{dy}{b(y)} dt = \int a(t) dt + C.$$

Quindi questo è l'integrale generale della ED proposta. Se $B(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ e $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora l'integrale generale della ED è assegnato dall'equazione (in forma IMPLICITA)

$$B(y) = A(t) + C \quad \text{con } C \text{ costante arbitraria.}$$


☞ **Osservazione 9.2.6.** Osserviamo che non è detto che si riesca a ricavare y esplicitamente o a ridurre la precedente equazione in forma normale.

In generale, per le equazioni a variabili separabili vale il seguente

Teorema 9.2.7. *Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t) b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con a continua in un intorno I di t_0 e b continua in un intorno J di y_0 . Allora esiste un intorno di t_0 che denoteremo con $I' \subset I$ e una funzione continua y definita su I' con derivata anch'essa continua su I' che è soluzione del problema. Inoltre se anche b' è continua su J (o b ha rapporto incrementale limitato in J anche se non è derivabile) allora tale soluzione è anche unica.

 **Esempio 9.2.8.** *Determinare l'integrale generale dell'ED*

$$y' = t y^3$$

disegnare alcune soluzioni nel piano e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Prima di tutto si osserva che $y = 0$ è integrale singolare per l'equazione data. Quindi se $y \neq 0$, separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int t dt + C$$

da cui

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + C$$

che porta a sua volta a

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{k - t^2}}, \quad k := -2C.$$

Imponendo il dato di Cauchy si osserva che l'unica soluzione è quella che si ottiene per $k = 1$ e considerando il segno positivo davanti alla radice, cioè

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

 **Esercizio 9.2.9.** *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y y' = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

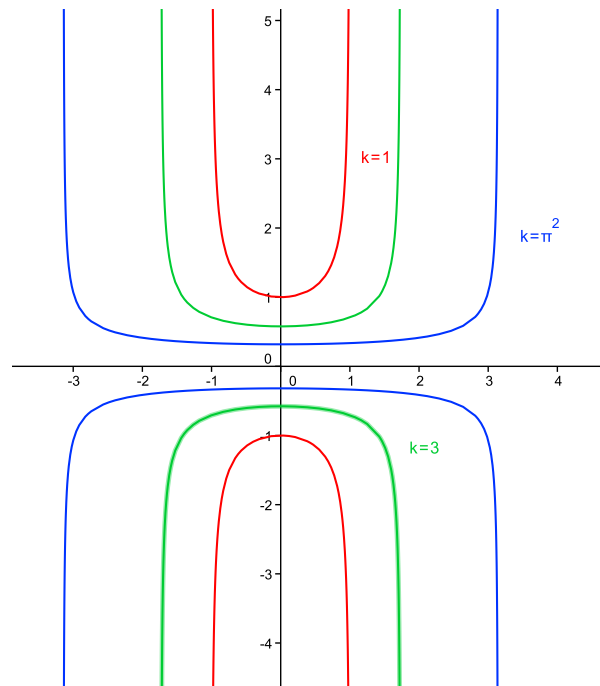


Figura 1: Alcune soluzioni dell'ED dell'Esempio 9.2.8.

Integrando ambo i membri della ED proposta si ottiene con facili calcoli

$$y = \pm\sqrt{4t + 2C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

quindi per ogni $C \in \mathbb{R}$ esistono due soluzioni (corrispondenti ai due segni davanti alla radice) definite solo per $t \geq -C/2$. Imponendo il dato di Cauchy si ottiene $y(0) = \pm\sqrt{2C} = 1$, quindi per compatibilità occorre scegliere il segno positivo davanti alla radice. La soluzione del problema proposto è dunque $y = \sqrt{4t + 1}$, definita solo per $t \geq -1/4$.

Andiamo a controllare se sono soddisfatte le condizioni del teorema: $a(t) = 2$ che è dunque una funzione continua e derivabile ovunque; $b(t) = 1/y$ che è continua e derivabile se $y \neq 0$. Quindi il problema di Cauchy per questa equazione ha una e una sola soluzione purché la condizione iniziale non sia del tipo $y(t_0) = 0$. Infatti l'equazione non è soddisfatta in questo punto perché si otterrebbe $0 = 2$. Quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y y' = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Non ha soluzione.

Quindi abbiamo trovato un esempio di problema di Cauchy in cui viene a mancare l'esistenza di soluzioni. In altre situazioni potrebbe venire a mancare l'unicità delle soluzioni, come mostra l'esempio successivo.

✎ **Esempio 9.2.10.** *Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si osserva che $b(y) = 2\sqrt{y}$ è una funzione continua ma non è derivabile in zero, quindi non possiamo dire che b' sia continua e in più nemmeno il rapporto incrementale di b è limitato (il grafico di b ha tangente verticale in 0). Quindi le ipotesi del Teorema 9.2.7 non sono soddisfatte e potrebbe a priori mancare l'unicità della soluzione (osserviamo che questo non è automatico! Se le ipotesi del teorema non valgono, a priori nulla si può dire, occorre analizzare caso per caso).

In questo caso comunque effettivamente manca l'unicità della soluzione. Infatti è facile dimostrare che

$$y_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(t) = \begin{cases} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy assegnato (per altro coincidono se $t < 0$). Inoltre si nota che y_2 è derivabile in 0 con $y_2'(0) = 0$.

9.2.3. Equazioni lineari del primo ordine

In questo paragrafo andiamo a trattare un caso particolare di ED ordinarie del primo ordine del tipo (9.2.1), il caso in cui F è lineare in y e y' . In questo caso tali equazioni si possono scrivere nella forma

$$a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = g(t),$$

con a_1, a_2 e g funzioni continue su un intervallo.

Se il coefficiente $a_1(t)$ non si annulla, l'ED lineare si può scrivere in forma normale

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t). \tag{9.2.5}$$

Anche in questo caso supporremo a e f continue in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

Se f non è identicamente nulla, la (9.2.5) si dice EQUAZIONE COMPLETA. Se $f \equiv 0$ invece, l'equazione si dice OMOGENEA e di solito, vista l'importanza che riveste tale equazione nella

struttura dell'integrale generale, si è soliti indicare con una lettera diversa (usualmente z) la soluzione di tale equazione, che diventa perciò

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0. \quad (9.2.6)$$

Vale il seguente risultato

Teorema 9.2.11. *L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'equazione omogenea una soluzione particolare dell'equazione completa.*

Nella parte restante del paragrafo ci occuperemo di studiare la struttura dell'integrale generale per l'equazione (9.2.5). Dal Teorema 9.2.11 sappiamo dunque che dobbiamo occuparci prima dello studio dell'integrale generale dell'equazione omogenea e poi della ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Ricerca dell'integrale generale dell'equazione omogenea

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$ (tale per cui si abbia $A'(t) = a(t)$). Moltiplichiamo ambo i membri di (9.2.7) per $e^{A(t)}$; si ottiene

$$z'(t)e^{A(t)} + a(t)z(t)e^{A(t)} = 0$$

da cui

$$\frac{d}{dt}[z(t)e^{A(t)}] = 0$$

e cioè $z(t)e^{A(t)} = C$ che si riscrive come

$$z(t) = C e^{-\int a(t) dt}. \quad (9.2.7)$$

☞ **Osservazione 9.2.12.** Notiamo che si può pensare la soluzione generale dell'equazione omogenea del tipo $z = C z_0$ con z_0 soluzione particolare dell'equazione omogenea e C costante arbitraria. Questo fatto può essere interpretato dicendo che L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI UNA ED LINEARE OMOGENEA È UNO SPAZIO VETTORIALE di dimensione 1. Si noti che per le equazioni differenziali ordinarie omogenee del secondo ordine vale un risultato corrispondente (l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2), ☞ Teorema 9.3.7.

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa

Utilizziamo il *metodo di variazione delle costanti*, che è un metodo piuttosto generale che funziona in diversi contesti. L'idea è di ricercare una soluzione simile alla (9.2.7); stavolta però

C non la prenderemo costante (altrimenti avremmo una soluzione dell'equazione omogenea), ma lasciamo che dipenda da t cioè sia $C \equiv C(t)$ funzione di t . Cerchiamo dunque la soluzione nella forma

$$\bar{y}(t) = C(t) e^{-A(t)}$$

La $C(t)$ deve essere determinata in modo tale che la \bar{y} così strutturata sia soluzione dell'equazione completa (9.2.5). Quindi osservando che

$$\bar{y}'(t) = C'(t) e^{-A(t)} - C(t) a(t) e^{-A(t)}$$

si deduce inserendo le corrispondenti informazioni all'interno dell'equazione completa (9.2.5)

$$e^{-A(t)}[C'(t) - C(t)a(t)] + a(t)C(t)e^{-A(t)} = f(t)$$

cioè

$$e^{-A(t)}C'(t) = f(t)$$

da cui $C'(t) = f(t)e^{A(t)}$ e dunque

$$C(t) = \int f(s) e^{A(s)} ds$$

(non c'è bisogno di aggiungere una costante arbitraria visto che basta trovare una scelta di $C(t)$ compatibile).

Quindi una soluzione particolare dell'equazione completa ha la forma

$$\bar{y}(t) = e^{-A(t)} \int f(s) e^{A(s)} ds.$$

☞ **Osservazione 9.2.13.** Osserviamo che $A(t)$ è già una primitiva, non c'è bisogno di aggiungere anche stavolta una ulteriore costante arbitraria; inoltre si può dimostrare che se scelgo un'altra primitiva il risultato non cambia e alla fine si ottiene la stessa formula.

Quindi riassumendo l'integrale generale dell'equazione completa ha la forma

$$y(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(s) e^{A(s)} ds \quad (9.2.8)$$

Risoluzione del problema di Cauchy

La costante arbitraria nella (9.2.8) è determinata dalla condizione iniziale $y(t_0) = y_0$. Scegliendo una primitiva tale per cui $A(t_0) = 0$ (cioè $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$), l'integrale generale che soddisfa il dato di Cauchy è

$$y(t) = y_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t f(s) e^{A(s)} ds. \quad (9.2.9)$$

Vale il seguente teorema

Teorema 9.2.14. (PROBLEMA DI CAUCHY PER UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL PRIMO ORDINE). *Siano a, f funzioni continue su un intervallo $I \ni t_0$. Allora per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $y \in \mathcal{C}^1(I)$ (dove $\mathcal{C}^k(I)$ è l'insieme delle funzioni continue, derivabili fino all'ordine k e con tutte le derivate fino all'ordine k continue); tale soluzione è assegnata dalla (9.2.9).

9.3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

In questo paragrafo andremo a studiare una classe particolare di ED ordinarie del tipo (9.1.1): quelle del secondo ordine lineari; la linearità della F è il punto cruciale per determinare la struttura dell'integrale generale.

9.3.1. Generalità

□ **Definizione 9.3.1.** Un'equazione differenziale del secondo ordine si dice LINEARE se è del tipo

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad (9.3.1)$$

dove i coefficienti a_i e il termine noto g sono funzioni definite in un certo intervallo I e continue nello stesso intervallo. L'equazione si dice OMOGENEA se g è identicamente nullo; in caso contrario si dice COMPLETA. L'equazione si dice A COEFFICIENTI COSTANTI se i coefficienti a_i sono costanti (per inciso, il termine noto può invece dipendere da t); in caso contrario si dice A COEFFICIENTI VARIABILI. Infine se a_1 non si annulla mai, l'equazione si può riscrivere in IN FORMA NORMALE come

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t). \quad (9.3.2)$$

☞ **Osservazione 9.3.2.** Consideriamo il seguente operatore

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^2(I) &\rightarrow \mathcal{C}^0(I) \\ L : y &\mapsto Ly \end{aligned}$$

dove gli spazi $\mathcal{C}^k(I)$, come abbiamo già accennato, sono gli spazi delle funzioni continue, derivabili fino all'ordine k e con tutte le derivate fino all'ordine k continue e dove abbiamo indicato con Ly il primo membro dell'equazione (9.3.1). Prima di tutto l'operatore è ben definito, perché se $y \in \mathcal{C}^2$ si ha che $Ly \in \mathcal{C}^0(I)$ e questo grazie alla continuità dei coefficienti a_i . Inoltre è facile dimostrare che L è un operatore lineare, nel senso che per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, per ogni $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I)$ si ha

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2.$$

Questa proprietà dell'operatore L giustifica il motivo per cui l'equazione (9.3.1) è detta lineare.

☞ **Esempio 9.3.3.** Il più semplice esempio di equazione lineare del secondo ordine è

$$y''(t) = 0.$$

Essa naturalmente equivale a dire che $y'(t) = C_1$ e da cui $y(t) = C_1 t + C_2$, con C_1, C_2 costanti arbitrarie. Quindi le soluzioni di questa equazione sono tutti e soli i polinomi di primo grado.

☞ **Esempio 9.3.4.** (L'OSCILLATORE ARMONICO) Consideriamo un punto materiale di massa m che rimane libero di muoversi in linea orizzontale, attaccato a una molla che esercita una forza di richiamo di tipo elastico. Denotiamo con $y(t)$ la posizione del punto sulla retta (rispetto alla configurazione di riposo). Allora si può dimostrare che y soddisfa l'equazione

$$my'' = -ky$$

dove $k > 0$ denota la costante elastica del sistema. Siccome ovviamente $m \neq 0$, allora si può riscrivere l'equazione in forma normale come

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (9.3.3)$$

dove $\omega^2 = k/m$. L'equazione prende il nome di OSCILLATORE ARMONICO.

L'equazione (9.3.3) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare omogenea

e a coefficienti costanti. Se sul punto agisce una forza esterna (dipendente solo dal tempo t) l'equazione si riscrive come

$$y'' + \omega^2 y = f(t);$$

nel caso venga presa in considerazione lo smorzamento dovuto all'attrito, l'equazione si trasforma in

$$y'' + hy' + \omega^2 y = 0$$

con $h > 0$.

Sarà chiaro in seguito che l'integrale generale di una qualunque equazione lineare del secondo ordine dipende da due parametri arbitrari. Quindi per selezionare una soluzione all'interno della famiglia di soluzioni stavolta, diversamente da quanto visto nel caso delle equazioni differenziali del primo ordine, dovremo assegnare due condizioni.

□ **Definizione 9.3.5.** Si dice **PROBLEMA DI CAUCHY** per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine (per semplicità la consideriamo espressa in forma normale), il problema

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (9.3.4)$$

Teorema 9.3.6. (ESISTENZA E UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY (9.3.4)) *Siano a, b, f funzioni continue in un intervallo $I \ni t_0$. Allora per ogni $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy (9.3.4) ammette un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^2(I)$.*

Questo risultato è analogo al corrispondente enunciato per le equazioni lineari del primo ordine. Anche in questo caso, la soluzione sarà ottenuta imponendo le condizioni iniziali nell'espressione che individua l'integrale generale dell'equazione (9.3.2). Quindi di nuovo il problema si riduce a comprendere come ottenere la struttura dell'integrale generale per un'equazione del tipo 9.3.2.

9.3.2. La struttura dell'integrale generale

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che un'equazione differenziale lineare del secondo ordine si può scrivere nella forma $Ly = f$, dove $L : \mathcal{C}^2(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$ è un operatore lineare tra due spazi di funzioni continue. L'equazione $Lz = 0$ si dice **EQUAZIONE OMOGENEA** associata all'equazione completa $Ly = f$. Il seguente teorema permette di determinare facilmente la struttura dell'integrale generale dell'equazione (9.3.2). Questo risultato non usa il fatto che

$Ly = f$ sia un'equazione differenziale e non dipende dall'ordine dell'equazione, sfrutta solamente il fatto che L è un operatore lineare.

Teorema 9.3.7. (STRUTTURA DELL'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE LINEARE COMPLETA) *Si può dimostrare che:*

- 1) *l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $Lz = 0$ in un dato intervallo I è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (sottospazio di $\mathcal{C}^2(I)$);*
- 2) *l'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea e una soluzione particolare dell'equazione completa.*

☞ **Osservazione 9.3.8.** Dal punto 1) del teorema precedente possiamo dedurre che esistono due soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ dell'equazione omogenea che sono linearmente indipendenti (ovvero non sono una multipla dell'altra) e ogni altra soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di z_1 e z_2 ; quindi questo significa che l'integrale generale dell'equazione omogenea è dato dalla formula

$$C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare dei coefficienti reali C_1, C_2 .

☞ **Esempio 9.3.9.** Si consideri l'equazione $t^2 z'' - 3tz' + 3z = 0$. Sia $z_1 = t$. Allora $z_1'(t) = 1$, $z_1''(t) = 0$ da cui $t^2 \cdot 0 - 3t \cdot 1 + 3t = -3t + 3t = 0$; quindi z_1 è una soluzione dell'equazione data. Sia ora $z_2 = t^3$. Allora $z_2'(t) = 3t^2$ e $z_2''(t) = 6t$ da cui inserendo le informazioni nell'equazione si ottiene $t^2 \cdot 6t - 3t \cdot 3t^2 + 3t^3 = 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$; quindi anche $z_2(t) = t^3$ è soluzione dell'equazione data. Le due soluzioni sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$z(t) = C_1 t + C_2 t^3,$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Nel caso precedente è particolarmente facile vedere che le due soluzioni proposte sono linearmente indipendenti; in generale può non essere così immediato. Il seguente criterio generale permette di decidere qualora due soluzioni proposte siano o no linearmente indipendenti.

Teorema 9.3.10. (DETERMINANTE WRONSKIANO E INDIPENDENZA) *Siano z_1, z_2 due funzioni $\mathcal{C}^2(I)$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea*

$$Lz \equiv z'' + a(t)z' + b(t) = 0$$

nell'intervallo I . Allora esse sono linearmente indipendenti in $\mathcal{C}^2(I)$ se e soltanto se la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{pmatrix}$$

detta MATRICE WRONSKIANA ha determinante diverso da zero per ogni $t \in I$ (dalla regolarità delle soluzioni, è sufficiente che il determinante di tale matrice sia diverso da zero in un punto $t_0 \in I$).

Riassumendo: per determinare l'integrale generale dell'equazione completa occorre:

- 1) determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea, quindi serve determinare 2 soluzioni $z_1(t)$ e $z_2(t)$ dell'equazione omogenea linearmente indipendenti;
- 2) determinare una soluzione particolare $\bar{y}(t)$ dell'equazione completa.

A questo punto l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da

$$\bar{y}(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che in generale risolvere tale problema non è affatto banale e noi riusciremo a farlo solo in alcuni casi particolari. Nei prossimi paragrafi mostreremo come fare.

9.3.3. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \quad a, b \text{ costanti.} \quad (9.3.5)$$

In analogia con il caso analogo del primo ordine, che ammette degli esponenziali come soluzioni, cerchiamo anche qui delle soluzioni di tipo esponenziale $t \mapsto e^{rt}$, con $r \in \mathbb{C}$. Sostituendo $z(t) = e^{rt}$ in (9.3.5) otteniamo

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0.$$

Siccome l'esponenziale è una funzione sempre positiva, affinché l'equazione precedente abbia soluzione è necessario che la costante r sia una radice dell'equazione di secondo grado

$$r^2 + ar + b = 0$$

che viene detta *equazione caratteristica* della (9.3.5). Si possono distinguere tre casi, a seconda del segno del discriminante.

• PRIMO CASO $\Delta = a^2 - 4b > 0$. In tal caso l'equazione caratteristica possiede due radici reali e distinte r_1 e r_2 ; quindi le funzioni $z_1(t) = e^{r_1 t}$ e $z_2(t) = e^{r_2 t}$ sono due soluzioni distinte e indipendenti della (9.3.5) il cui integrale generale si scrive

$$z(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

• SECONDO CASO $\Delta = a^2 - 4b = 0$. In tal caso l'equazione caratteristica possiede l'unica radice (con doppia molteplicità) $r = -a/2$; quindi una soluzione è sicuramente

$$z(t) = C e^{-\frac{a}{2}t} \tag{9.3.6}$$

Per trovare una seconda soluzione usiamo (come nel caso delle equazioni del primo ordine) di nuovo il metodo delle variazioni delle costanti. La cerchiamo simile alla (9.3.6) con l'idea che stavolta la costante dipenda da t , cioè nella forma

$$z(t) = C(t) e^{rt}, \quad r = -\frac{a}{2}.$$

Da cui

$$z'(t) = e^{rt}(rC(t) + C'(t)), \quad z''(t) = e^{rt}(r^2C(t) + 2rC'(t) + C''(t))$$

quindi sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene

$$e^{rt}[(r^2 + ar + b)C(t) + (2r + a)C'(t) + C''(t)] = 0.$$

Siccome ricordiamo che $r = -a/2$, allora il coefficiente davanti alla $C'(t)$ si annulla; inoltre r è soluzione dell'equazione caratteristica quindi anche il coefficiente davanti alla $C(t)$ si annulla; quindi deve necessariamente essere $C''(t) = 0$ da cui $C(t) = C_2 t + C_1$. Allora la soluzione generale dell'equazione (9.3.5) si può scrivere come

$$z(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 + C_2 t).$$

• TERZO CASO $\Delta = a^2 - 4b < 0$. In tale caso l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ (con α e β reali). Quindi soluzioni (indipendenti) della (9.3.5) sono le funzioni

$$z_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t); \quad z_2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

A volte è preferibile avere delle soluzioni reali; quindi ricordando che ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione dell'equazione, allora invece che z_1 e z_2 scegliamo $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ e $\frac{1}{2i}(z_1 - z_2)$, cioè

$$e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{e} \quad e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

L'integrale generale della (9.3.5) si può dunque scrivere nella forma


$$z(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

o in maniera del tutto equivalente (ricordando lo sviluppo del coseno di una somma)

$$z(t) = e^{\alpha t} A \cos(\beta t + \varphi).$$

Riassumendo: in ciascuno dei tre casi studiati abbiamo determinato due soluzioni dell'equazione omogenea che risultano linearmente indipendenti:

Caso $\Delta > 0$	$e^{r_1 t}$	$e^{r_2 t}$
Caso $\Delta = 0$	e^{rt}	te^{rt}
Caso $\Delta < 0$	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$e^{\alpha t} \sin \beta t$

 **Esempio 9.3.11.** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z'' - 2z' - 3z = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione proposta è differenziale ordinaria del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

che dà come soluzioni $r = -1$ e $r = 3$. Quindi da quanto detto sopra l'integrale generale dell'equazione risulta

$$z(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t},$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Imponendo i dati di Cauchy si deduce

$$1 = z(0) = C_1 + C_2; \quad 2 = z'(0) = -C_1 + 3C_2$$

da cui

$$C_1 = \frac{1}{4}; \quad C_2 = \frac{3}{4}.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$z(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}.$$

9.3.4. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza

In questo paragrafo ci occupiamo di trovare un integrale particolare dell'equazione completa associata a un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare a coefficienti costanti del tipo

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = f(t), \quad a, b \text{ costanti} \tag{9.3.7}$$

nel caso in cui il termine noto $f(t)$ abbia una forma particolare. Un metodo più generale (ma anche di solito più complesso a livello di calcoli) si basa sul metodo di variazione delle costanti. Invece quando f ha una forma particolarmente semplice, un'idea alternativa è quella di cercare una soluzione che *assomigli* a f nel senso che andremo a specificare.

- PRIMO CASO: $f(t) = p_r(t)$ polinomio di grado r . In tal caso si cerca una soluzione che sia anch'essa un polinomio, con le seguenti caratteristiche:

dove $q_r(t)$ è il generico polinomio di grado r di cui bisogna determinare i coefficienti.

$\bar{y}(t) = q_r(t)$	se $b \neq 0$
$\bar{y}(t) = t q_r(t)$	se $b = 0$ e $a \neq 0$
$\bar{y}(t) = t^2 q_r(t)$	se $b = 0$ e $a = 0$

- SECONDO CASO: $f(t) = A e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. In tal caso si cerca una soluzione del tipo $y(t) = e^{\lambda t} \gamma(t)$. Con calcoli del tutto simili a quelli svolti per l'equazione omogenea si ottiene

$$\gamma'' + \gamma'(2\lambda + a) + \gamma(\lambda^2 + a\lambda + b) = A.$$

Osserviamo che è sufficiente trovare una qualunque γ tale che l'equazione precedente sia soddisfatta. Quindi possiamo distinguere i seguenti casi:

a) Se $\lambda^2 + a\lambda + b \neq 0$ (cioè se λ non è radice dell'equazione caratteristica) basta prendere

$$\gamma(t) = \text{costante} = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}$$

da cui

$$\bar{y}(t) = \frac{A e^{\lambda t}}{\lambda^2 + a\lambda + b}.$$

Quindi una soluzione particolare della (9.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{C}$ (e quindi visto che basta trovare una soluzione particolare posso anche scegliere $C \in \mathbb{R}$).

b) Se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma $2\lambda + a \neq 0$, allora basta prendere

$$\gamma'(t) = \text{costante} = \frac{A}{2\lambda + a} \quad \text{da cui} \quad \gamma(t) = \frac{At}{2\lambda + a}.$$

Quindi si ha

$$\bar{y}(t) = \frac{At e^{\lambda t}}{2\lambda + a}.$$

perciò una soluzione particolare della (9.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C t e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{C}$ (e quindi di nuovo posso anche scegliere $C \in \mathbb{R}$).

c) Se infine $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$ allora semplicemente si ha $\gamma''(t) = A$ da cui

$$\gamma(t) = \frac{A}{2} t^2, \quad \bar{y}(t) = \frac{A}{2} t^2 e^{\lambda t}.$$


Quindi una soluzione particolare della (9.3.7) può essere scritta nella forma

$$\bar{y}(t) = C t^2 e^{\lambda t},$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che in questa classe particolare di termini noti del tipo $A e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ rientrano anche i casi

$$\cos \omega t, \sin \omega t, e^{\mu t} \cos \omega t, e^{\mu t} \sin \omega t \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}.$$

 **Esempio 9.3.12.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 1 + t^2$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Cerchiamo una soluzione del tipo generico polinomio di secondo grado

$$\bar{y}(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2.$$

Siccome si ha

$$\bar{y}'(t) = C_1 + 2C_2 t, \quad \bar{y}''(t) = 2C_2$$

inserendo queste informazioni nell'equazione di partenza si ottiene

$$2C_2 - 3(C_1 + 2C_2 t) + 2(C_0 + C_1 t + C_2 t^2) = 1 + t^2.$$

A questo punto vado a uguagliare i coefficienti dei termini con lo stesso grado, a destra e a sinistra, ottenendo il seguente sistema


$$\begin{cases} 2C_2 - 3C_1 + 2C_0 = 1 \\ -6C_2 + 2C_1 = 0 \\ 2C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente

$$C_0 = \frac{9}{4}; \quad C_1 = \frac{3}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\bar{y}(t) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^2.$$

 **Esempio 9.3.13.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' = t$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Osserviamo che il termine noto è di primo grado ma nell'equazione manca il termine in y ; quindi si ricade nel caso b) elencato in precedenza. Quindi cerchiamo una soluzione del tipo polinomio di secondo grado della forma

$$\bar{y}(t) = C_1 t + C_2 t^2$$

Con semplici calcoli si deduce che deve essere

$$2C_2 + 2C_1 + 4C_2 t = t$$

quindi


$$\begin{cases} 4C_2 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$C_1 = -\frac{1}{4}; \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione proposta è

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2.$$


 **Esempio 9.3.14.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' + 2y' + 3y = 3e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Per quanto detto sopra, possiamo cercare una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = C e^{3t}$. Da cui con semplici calcoli

$$C e^{3t}(9 + 2 \cdot 3 + 3) = 18 C e^{3t} = 3 e^{3t}$$

quindi $C = 1/6$ e $\bar{y}(t) = \frac{1}{6} e^{3t}$.

 **Esempio 9.3.15.** Si trovi una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{3t}.$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. Ripetendo lo stesso ragionamento dell'esempio precedente, quindi andando a cercare una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = C e^{3t}$ si ottiene


$$C e^{3t}(9 - 2 \cdot 3 - 3) = 0 = 3 e^{3t}$$

quindi non esiste una costante C (nemmeno in campo complesso) tale per cui la funzione \bar{y} proposta risolva l'equazione data. Questo perché a ben vedere $r = -3$ è soluzione dell'equazione caratteristica associata $r^2 - 2r - 3 = 0$. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(t) = C t e^{3t}$. Si ottiene innanzitutto

$$\bar{y}'(t) = C e^{3t} + 3C t e^{3t}; \quad \bar{y}''(t) = 6C e^{3t} + 9C t e^{3t}$$

da cui inserendo nell'equazione si ottiene $C = 3/4$. Una soluzione particolare è dunque

$$\bar{y}(t) = \frac{3}{4} t e^{3t}.$$

 **Osservazione 9.3.16.** Quando il termine noto è del tipo $A e^{\mu t} \cos(\omega t)$, ricordando che

$$A e^{(\mu+i\omega)t} = A e^{\mu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

si può procedere risolvendo l'equazione con il termine noto $Ae^{(\mu+i\omega)t}$ e poi prendere la parte reale di tale soluzione complessa; per linearità infatti troveremo la soluzione con il termine noto cercato. Analogamente se il termine noto è della forma $Ae^{\mu t} \sin(\omega t)$ si procede andando a prendere la parte immaginaria. Alternativamente, si può pensare di procedere senza usare i numeri complessi: in tal caso si deve andare a cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = e^x(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)).$$

Usualmente comunque l'uso dell'esponenziale complesso rende i calcoli delle derivate di y meno laboriosi. Inoltre, anche se il termine noto contiene solo seno oppure coseno, quando si cerca una soluzione particolare si deve sempre cercare come combinazione lineare di entrambi seno e coseno.

✎ **Esercizio 9.3.17.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 2y' - y = 2e^x \cos(3x).$$

✦ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = \frac{2e^x}{193}(-7 \cos 3x + 12 \sin 3x)$$

✎ **Osservazione 9.3.18.** (METODO DI SOVRAPPOSIZIONE) Nel caso in cui $f(t)$ sia combinazione lineare di termini appartenenti a due tipologie diverse (esempio polinomio più esponenziale o polinomio più funzione trigonometrica) per linearità prima si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il primo termine del termine noto originario, poi si trova una soluzione dell'equazione che ha come termine noto il secondo termine del termine noto originario e infine una soluzione dell'equazione di partenza sarà la somma delle due soluzioni trovate.

✎ **Esercizio 9.3.19.** *Si trovi una soluzione particolare dell'equazione*

$$y'' + 3y = t + 2 \cos t$$

✦ **R.** Procedendo come sottolineato, si ottiene infatti una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = \frac{t}{3} + \cos t.$$

CAPITOLO 10

Successioni definite per ricorrenza

Fino ad ora abbiamo introdotto le successioni come funzioni definite su \mathbb{N} o su una sua semiretta. In tutti i casi trattati, l'espressione esplicita della successione era nota; questo significa che gli elementi della successione si potevano elencare a partire dall'espressione generale di a_n , quindi per esempio se $a_n = n^2$ si ha

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots$$


In questo capitolo andiamo a introdurre le **SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA** che sono un modo alternativo di introdurre le successioni. Secondo questa definizione alternativa, l'espressione esplicita di a_n non è nota (e solo in rari casi si può dedurre - per intuizione - e dimostrare per induzione), ma è noto il primo termine, dopo di che il termine n -esimo si deduce dal termine immediatamente precedente.

 **Esempio 10.0.20.**

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \sin(\cos(\sin a_n)) \end{cases}$$

Anche in questo caso, l'obiettivo è naturalmente quello di andare a studiare il comportamento della successione, per $n \rightarrow \infty$.

La prima cosa da controllare, prima di poter svolgere i calcoli, è controllare che tutto abbia senso.

 **Esempio 10.0.21.** *Si consideri la successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} - 1000 \end{cases}$$

È chiaro infatti che in questo caso, $a_0 = 2012$, $a_1 = \sqrt{2012} - 1000 < 0$ quindi $\sqrt{a_1}$ non esiste (e perciò a_2 non può essere calcolato). Questo significa che la successione non è ben definita.

✎ **Esempio 10.0.22.** Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 1000 \end{cases}$$

Questa successione è ben definita. Infatti si dimostra per induzione che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una volta appurato che la successione è ben definita, occorre andare a studiare (se esiste) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. La prima cosa, se si riesce, è provare a derivare l'espressione generale della successione.

✎ **Esempio 10.0.23.** Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3 \end{cases}$$

Scriviamola per il termine generico $a_0 = \alpha \in \mathbb{R}$. Proviamo a scrivere qualche termine:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= \frac{\alpha}{2} + 3 \\ a_2 &= \frac{a_1}{2} + 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + 3 \right) = \frac{\alpha}{4} + \frac{3}{2} + 3 \\ a_3 &= \frac{a_2}{2} + 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{2} + 3 \right) = \frac{\alpha}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 \\ a_4 &= \frac{a_3}{2} + 3 = \frac{\alpha}{16} + 3 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allora la congettura è che la formula esplicita della successione sia:

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + 3 \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

Ricordando che

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad x \neq 1$$

(nel nostro caso $x = 1/2$) si ha

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n} + 3 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\alpha}{2^n} + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

Proviamo la formula per induzione. Per $n = 0$ si ha $a_0 = \frac{\alpha}{2^0} + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = \alpha$. Dimostriamo ora il passo induttivo. Supponiamo di sapere che la formula valga per un certo n e mostriamo che vale anche per $n + 1$. Si ha

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2^n} + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \right) + 3 = \frac{\alpha}{2^{n+1}} + 3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 3 \\ &= \frac{\alpha}{2^{n+1}} + 3 \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{\alpha}{2^{n+1}} + 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

che è esattamente la formula che volevamo dimostrare.

Ora che abbiamo stabilito la formula esplicita per a_n , possiamo andare a calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

usando le tecniche che abbiamo imparato fino ad ora. Si ha dunque banalmente (per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Modo in cui non si opera: Se $a_n \rightarrow \ell$; allora banalmente anche $a_{n+1} \rightarrow \ell$ quindi passando al limite dentro la legge ricorsiva $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3$ si otterrebbe

$$\ell = \frac{\ell}{2} + 3$$

da cui, risolvendo l'equazione, $2\ell = \ell + 6$ da cui $\ell = 6$.

Perché questo non è un modo corretto di procedere? Prima di tutto si è dato per scontato che il limite esista (fatto non ovvio!) e secondariamente che il limite sia finito. Quello che si è dimostrato attraverso questo modo di procedere è che *se il limite esiste ed è finito, allora vale 6*, ma occorre dimostrare con metodi alternativi che il limite esista (e sia finito); in caso contrario si rischia di ottenere risultati errati.

Esempio di applicazione del ragionamento errato: sia data la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$$

se $a_n \rightarrow \ell$ allora anche $a_{n+1} \rightarrow \ell$ quindi inserendo nella legge ricorsiva $\ell = 2\ell + 3$ quindi $\ell = -3$, che non è ovviamente possibile visto che si dimostra facilmente per induzione che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso la formula generale (che andrebbe verificata per induzione) è

$$a_n = 2^n(\alpha + 3) - 3$$

quindi dalla formula generale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \alpha > -3 \\ -3 & \alpha = -3 \\ -\infty & \alpha < -3 \end{cases}$$

 **Esempio 10.0.24.** Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{2} \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases}$$

La successione è ben definita; inoltre la congettura è che $a_n \rightarrow 0$. Come facciamo a dimostrare questo fatto? Supponiamo che il limite di a_n esista finito. Allora $a_n \rightarrow \ell$ da cui $a_{n+1} \rightarrow \ell$ e quindi $\ell = \sin \ell$ dunque l'unica soluzione è $\ell = 0$. Cosa siamo riusciti a dimostrare? Che il limite può avere i seguenti comportamenti:

- (1) essere $\ell = 0$;
- (2) essere $\ell = +\infty$
- (3) essere $\ell = -\infty$
- (4) non esistere.

Se congetturiamo che effettivamente $\ell = 0$, dobbiamo dimostrare con altri mezzi che le altre possibilità vengano escluse.

Innanzitutto è facile dimostrare per induzione che $-1 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (infatti a_0 può anche essere maggiore di 1 in modulo ma dal secondo step in poi tutti i termini della successione sono in modulo minori di uno, perché sono il seno di qualche quantità). Questo esclude il fatto che il limite possa essere $\pm\infty$. Resta da dimostrare che effettivamente il limite esiste. Per fare questo utilizziamo il fatto che se una successione è monotona allora ammette limite (in questo caso, avendo escluso che il limite possa essere infinito, si potrà solo concludere $\ell = 0$). Quindi tutti i nostri sforzi vanno nella direzione di dimostrare che la successione è monotona, decrescente. Dovremmo dimostrare che

$$a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \sin a_n \leq a_n$$

ma questa è una disuguaglianza fondamentale

$$\sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0$$

Quindi per concludere basta dimostrare che $a_n \geq 0$ per ogni n ; questo è facile perché per induzione si dimostra che

$$0 \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Riassumendo, per trattare correttamente la successione definita per ricorrenza proposta occorre seguire i seguenti passi:

-
- (1) dimostrare per induzione che $0 \leq a_n \leq \pi/2$;
 - (2) dal passo (1) segue che $\sin a_n \leq a_n$
 - (3) dal passo (2) segue che la successione a_n è monotona decrescente
 - (4) dal passo (3) segue che il limite della successione a_n esiste (lo si chiami ℓ)
 - (5) dal passo (1) segue che ℓ deve necessariamente essere finito
 - (6) dal ragionamento secondo cui $\ell = \sin \ell$ segue che necessariamente $\ell = 0$

☞ **Osservazione 10.0.25.** Si noti che tutto il ragionamento è fortemente condizionato anche dal valore iniziale di a_0 . Infatti, ad esempio nel caso appena considerato, se al posto della precedente successione avessimo avuto

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases}$$

avremmo avuto due possibilità:

- (a) $0 \leq \sin 2012 \leq 1$ allora la successione è monotona decrescente e dunque $a_n \rightarrow 0$ (si possono seguire tutti i ragionamenti formalizzati nel caso precedente)
- (b) $-1 \leq \sin a_n \leq 0$ allora il ragionamento precedente si può ripetere ma al passo (2) avremmo dovuto dimostrare per induzione $\sin a_n \geq a_n$ (la disuguaglianza si inverte per valori negativi) portando sempre alla conclusione che $a_n \rightarrow 0$.

📖 **Esempio 10.0.26.** Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases}$$

- (1) La successione definita per ricorrenza è ben definita e si può dimostrare per induzione che $a_n \geq 0$ per ogni n .
- (2) Si dimostra per induzione che $a_n \geq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (3) Si dimostra per induzione, grazie al punto (2), che la successione è monotona decrescente: infatti si deve dimostrare che

$$a_{n+1} \leq a_n$$

cioè

$$\sqrt{a_n + 2} \leq a_n$$

Siccome dal punto (1) ho dimostrato che $a_n \geq 0$, allora posso elevare a quadrato ambo i membri ottenendo

$$a_n^2 - a_n - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a_n \leq -1 \vee a_n \geq 2$$

(la parte $a_n \leq -1$ non ci interessa perché sappiamo che $a_n \geq 0$ mentre la seconda parte è quella che ci serviva e l'abbiamo dimostrata al punto (2))

- (4) A questo punto, dal passo (3), sappiamo che la successione ammette limite ℓ : non può

essere $\ell = +\infty$ perché a_n è decrescente; non può essere $\ell = -\infty$ dal passo (2), quindi $\ell \in \mathbb{R}$ e per confronto dal passo (2) deve necessariamente essere $\ell \geq 2$

(5) concludiamo passando al limite la relazione di ricorrenza: se $a_n \rightarrow \ell$ allora anche $a_{n+1} \rightarrow \ell$ dunque deve essere

$$\ell = \sqrt{\ell + 2}$$

equazione che dà come soluzioni $\ell = -1$ non accettabile dal passo (2) e $\ell = 2$ accettabile. Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

Vediamo ora cosa cambia se variamo il valore di a_0 .

 **Esempio 10.0.27.** *Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza*

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases}$$

(1) La successione definita per ricorrenza è ben definita e si può dimostrare per induzione che $a_n \geq 0$ per ogni n .

(2) Si dimostra per induzione che stavolta $a_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi questo unito al passo (1) ci dice che $0 \leq a_n \leq 2$

(3) Si dimostra per induzione, grazie al punto (2), che la successione è monotona stavolta crescente: infatti si deve dimostrare che

$$a_{n+1} \geq a_n$$

cioè

$$\sqrt{a_n + 2} \geq a_n$$

Posso elevare a quadrato ambo i membri senza problemi ottenendo

$$a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a_n \leq 2$$

(la parte $a_n \geq -1$ a maggior ragione segue dal passo (1) $a_n \geq 0$ mentre la seconda parte è quella che ci serviva e l'abbiamo dimostrata al punto (2))

(4) A questo punto, dal passo (3), sappiamo che la successione ammette limite ℓ : non può essere $\ell = -\infty$ perché a_n è crescente; non può essere $\ell = +\infty$ dal passo (2), quindi $\ell \in \mathbb{R}$ e per confronto dal passo (2) deve necessariamente essere $0 \leq \ell \leq 2$

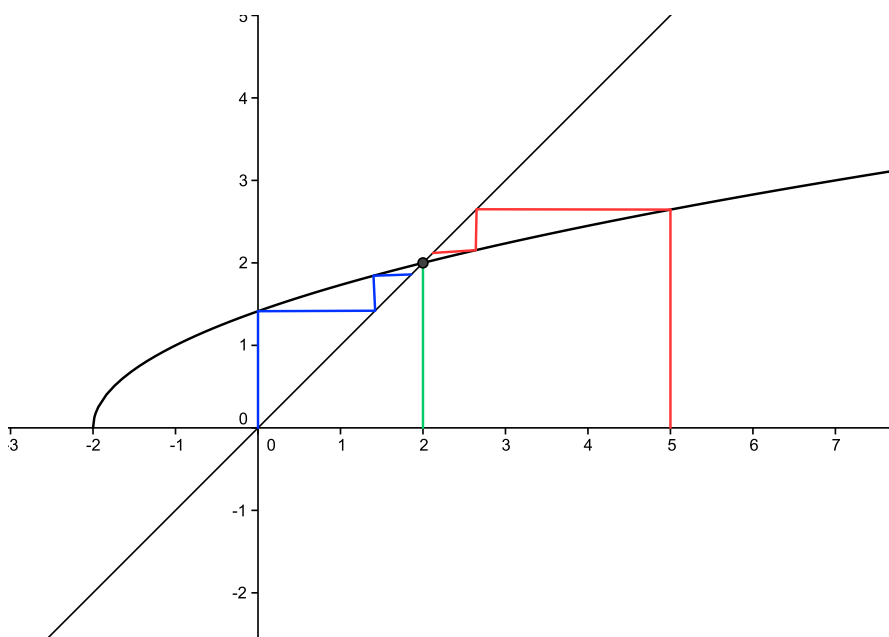
(5) concludiamo passando al limite nella legge ricorsiva: se $a_n \rightarrow \ell$ allora anche $a_{n+1} \rightarrow \ell$ dunque deve essere

$$\ell = \sqrt{\ell + 2}$$

equazione che dà come soluzioni $\ell = -1$ non accettabile dal passo (2) e $\ell = 2$ accettabile. Dunque di nuovo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

Possiamo dare un'interessante rappresentazione grafica del comportamento delle successioni definite per ricorrenza.



Interpretiamo la successione definita per ricorrenza come una successione di valori input-output. Sia a_0 un valore sull'asse delle x che sarà il nostro primo input. Sia $a_0 > 2$ (che è il primo caso che abbiamo considerato - linea rossa - ma possiamo poi anche considerare il caso $a_0 < 2$ - linea blu - e il caso $a_0 = 2$ - linea verde - in cui la successione è costantemente uguale a 2 per ogni n). Allora dalla legge ricorsiva (che sarebbe $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$) si ha

$$a_1 = \sqrt{a_0 + 2}$$

quindi l'output è a_1 . Questo equivale graficamente a tracciare una linea verticale fino ad incontrare la funzione $y = \sqrt{x+2}$. Ora a_1 diventa il nostro nuovo input, da inserire di nuovo nella legge ricorsiva. Graficamente questo corrisponde a tracciare una linea orizzontale fino alla bisettrice del primo e terzo quadrante; analiticamente invece significa che l'output a_1 che era una y (data da $y = \sqrt{x+2}$ con $x = a_0$) diventa una nuova x (infatti sulla bisettrice ho $y = x$), cioè a_1 diventa il nuovo input da inserire nella legge ricorsiva.

A questo punto allora inseriamo a_1 nella legge ricorsiva ottenendo

$$a_2 = \sqrt{a_1 + 2}$$

e questo corrisponde graficamente a tracciare una linea verticale fino ad incontrare di nuovo la funzione $y = \sqrt{x+2}$ e così via.

Il grafico è utile per dare un'idea del comportamento eventualmente monotono della successione definita per ricorrenza (comportamento che poi va dimostrato RIGOROSAMENTE per induzione! Infatti il metodo grafico NON SOSTITUISCE il metodo analitico!).

Riassumendo, partendo da a_0 input:


a_1 output	$a_1 = \sqrt{a_0 + 2}$	verticale fino alla funzione $y = \sqrt{x+2}$
a_1 nuovo input	$a_1 = a_1$	orizzontale fino alla bisettrice $y = x$
a_2 output	$a_2 = \sqrt{a_1 + 2}$	verticale fino alla funzione $y = \sqrt{x+2}$
a_2 nuovo input	$a_2 = a_2$	orizzontale fino alla bisettrice $y = x$
a_3 output	$a_3 = \sqrt{a_2 + 2}$	verticale fino alla funzione $y = \sqrt{x+2}$
\vdots		

Per esercizio è possibile tracciare i grafici dei comportamenti delle successioni definite per ricorrenza studiate prima

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_0 = 2012 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$$

 **Esempio 10.0.28.** Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = -\frac{a_n^2}{10} + 1 \end{cases}$$

Questo caso è molto più difficile di quelli appena trattati perché da un'analisi grafica si congettura immediatamente la mancanza di monotonia della successione. L'esistenza del limite dunque andrà provata in altri modi. Vediamo come.

Supponiamo che esista il limite della successione finito e passiamo al limite nella legge ricorsiva. Si avrebbe

$$\ell = -\frac{\ell^2}{10} + 1$$

da cui

$$\ell^2 + 10\ell - 10 = 0$$

che dà come soluzioni

$$\gamma := \frac{-10 + \sqrt{140}}{2} \quad \beta := \frac{-10 - \sqrt{140}}{2}$$

Si noti che $0 < \gamma < 1$. Ora tentiamo di dimostrare che effettivamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma.$$

(1) a_n è ben definita.

(2) Per induzione si dimostra che

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{10} \quad n \in \mathbb{N}$$

(3) Quindi le possibilità rimaste sono: (a) che il limite esista e sia γ oppure che il limite esista e sia β oppure che il limite non esista. La seconda possibilità è da escludere perchè $\beta < 0$ quindi per provare la nostra congettura occorre dimostrare che il limite esiste, senza poter usare la monotonia come fatto fino ad ora.

PRIMO MODO: dimostriamo che

$$|a_{n+1} - \gamma| \leq \frac{|a_n - \gamma|}{2} \tag{10.0.1}$$

questo significa che se anche la successione non è monotona, pensiamo di riuscire a dimostrare che la differenza tra il valore della successione e il valore del limite γ (cioè la quantità $|a_n - \gamma|$) diventa ad ogni passo sempre più piccola fino a tendere a zero. Allora si ha che

$$|a_{n+1} - \gamma| = \left| -\frac{a_n^2}{10} + 1 + \frac{\gamma^2}{10} - 1 \right|$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo γ il limite, allora è soluzione dell'equazione $x = -\frac{x^2}{10} + 1$, quindi $\gamma = -\frac{\gamma^2}{10} + 1$. A questo punto allora

$$|a_{n+1} - \gamma| = \left| -\frac{a_n^2}{10} + \frac{\gamma^2}{10} \right| = \frac{1}{10} |\gamma + a_n| |\gamma - a_n| \stackrel{?}{\leq} \frac{|a_n - \gamma|}{2}$$

se e soltanto se $|a_n + \gamma| \leq 5$ che è vera dai passi precedenti, in quanto $0 < \gamma < 1$ e $0 < a_n < \sqrt{10}$. Quindi siamo riusciti a provare (10.0.1). Scrivendo questa relazione e iterandola, si riesce a dimostrare per induzione che

$$0 \leq |a_n - \gamma| \leq \frac{|a_0 - \gamma|}{2^n}$$

quindi il termine di destra tende a zero e dunque anche il termine centrale tende a zero dal teorema del confronto. Questo è quanto volevamo dimostrare.

SECONDO MODO: abbiamo congetturato che la successione a_n non è monotona, ma dal comportamento grafico possiamo congetturare (e quindi dimostrare) che la successione dei termini pari è crescente e la successione dei termini dispari è decrescente. Mostriamo per induzione (contemporaneamente!) entrambe queste affermazioni, cioè proviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &\geq a_{2n} \\ a_{2n+3} &\leq a_{2n+1} \end{aligned}$$

Proviamo il passo corrispondente a $n = 0$, cioè

$$\begin{aligned} a_2 &\geq a_0 \\ a_3 &\leq a_1 \end{aligned}$$

e questo viene dai conti diretti. Ora bisogna dimostrare il passo induttivo. Supponiamo che sia

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &\geq a_{2n} \\ a_{2n+3} &\leq a_{2n+1} \end{aligned}$$

e dobbiamo dimostrare che

$$\begin{aligned} a_{2n+4} &\geq a_{2n+2} \\ a_{2n+5} &\leq a_{2n+3} \end{aligned}$$

Allora

$$a_{2n+4} \geq a_{2n+2} \Leftrightarrow -\frac{a_{2n+3}^2}{10} + 1 \geq -\frac{a_{2n+1}^2}{10} + 1 \Leftrightarrow (a_{2n+3})^2 \leq (a_{2n+1})^2$$

ma questa è vera dal passo induttivo! Allo stesso modo

$$a_{2n+5} \leq a_{2n+3} \Leftrightarrow -\frac{a_{2n+4}^2}{10} + 1 \leq -\frac{a_{2n+2}^2}{10} + 1 \Leftrightarrow (a_{2n+4})^2 \geq (a_{2n+2})^2$$

e questa è immediata conseguenza di quanto appena dimostrato dal passo precedente.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \gamma &\geq a_{2n+2} \geq a_{2n} \\ \gamma &\leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1} \end{aligned}$$

ma ora sappiamo che la sottosuccessione sui pari e quella sui dispari sono entrambe monotone, perciò ammettono limite: sia

$$a_{2n} \rightarrow \ell \quad a_{2n+1} \rightarrow m$$

da cui $\ell \leq \gamma \leq m$. A questo punto passando al limite nella legge ricorsiva, se si va a considerare

$$a_{2n} = -\frac{(a_{2n-1})^2}{10} + 1$$

si ottiene

$$\ell = -\frac{m^2}{10} + 1$$

e analogamente dalla

$$a_{2n+1} = -\frac{(a_{2n})^2}{10} + 1$$

si ha

$$m = -\frac{\ell^2}{10} + 1.$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni ottenute si ha

$$m - \ell = \frac{m^2 - \ell^2}{10} = \frac{(m - \ell)(m + \ell)}{10}$$

da cui

$$m = \ell \quad \vee \quad m + \ell = 10$$

La seconda è assurda perché dal passo precedente si ha $\ell \leq \gamma \leq m$ con $0 < \gamma < 1$, quindi deve per forza essere

$$m = \ell = \gamma$$

e questo permette di concludere che anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma$.

✎ **Esempio 10.0.29.** Si studi il comportamento della successione definita per ricorrenza (detta **SUCCESSIONE DI FIBONACCI**)

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

Si ha

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 5, \quad a_6 = 8, \quad \dots$$

La congettura è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

La dimostrazione segue i seguenti passi:

- (1) la successione è ben definita;
- (2) per induzione si dimostra che $a_n \geq 1$ se $n \geq 1$;
- (3) banalmente dalla legge ricorsiva si ha che $a_{n+1} \geq a_n$ quindi la successione data è monotona crescente; dunque esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ finito o infinito (si esclude $\ell = -\infty$)
- (4) se per assurdo fosse ℓ reale, allora passando al limite nella legge ricorsiva si avrebbe

$$\ell = 2\ell$$

dunque $\ell = 0$, ma dal passo (2) $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq 1$ dunque il limite della successione non può essere zero. Dunque come congetturato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Si può dimostrare che la formula esplicita per la successione di Fibonacci è

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

che, sorprendentemente, per ogni n è un numero intero!