

Esercizi riguardanti limiti di successioni

DAVIDE BOSCAINI

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 27 Ottobre 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Per cominciare richiamiamo alcuni risultati teorici indispensabili per affrontare gli esercizi

Teorema 1 (del confronto). *Se a_n e b_n sono due successioni di numeri reali tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Se inoltre esiste una terza successione c_n tale che $a_n \leq c_n \leq b_n$ definitivamente e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L.$$



Sfrutteremo questo teorema, ad esempio, quando riusciremo a minorare il termine generale di una successione di cui non conosciamo il limite con il termine generale di una successione che sappiamo divergere a $+\infty$. La seconda parte di questo teorema è anche nota sotto il nome di *teorema dei due carabinieri*.

Proposizione 1. *Se a_n , b_n e c_n sono successioni tali che i limiti*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

esistono e sono finiti, allora esistono anche i seguenti limiti e

(i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n;$

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right);$

(iii) *se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b \neq 0$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n};$$

(iv) *se $b_n > 0$ per ogni n e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > 0$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{c_n} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right)^{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n}.$$



Attenzione, questo teorema assume come ipotesi che il limite delle successioni considerate esista e sia finito. Non potremo quindi applicarlo a successioni di cui non conosciamo il limite o qualora esso non fosse finito.

Esercizio 1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 - n^2 - 5n + 1.$$

Soluzione. L'esercizio ci chiede di calcolare il limite di una successione di termine generale $a_n = 2n^3 - n^2 - 5n + 1$. Osserviamo subito che abbiamo a che fare con una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Scegliamo quindi una scomposizione diversa del termine generale a_n , ad esempio

$$a_n = n^3 \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right).$$

Poniamo ora $b_n = n^3$ e $c_n = 2 - 1/n - 5/n^2 + 1/n^3$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty,$$

e per il punto (i) della proposizione 1 troviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 2.$$

Noti i limiti dei fattori che compongono a_n , vorremmo un risultato che ci possa far concludere, ma non possiamo applicare la proprietà (ii) della proposizione 1, infatti b_n divergendo non può ammettere limite finito. Ci serve quindi un altro risultato per poter continuare nel calcolo del limite assegnato. Vale

Proposizione 2. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \neq 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, allora

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = +\infty;$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Soluzione (continua). Questa volta abbiamo la proposizione giusta: nel nostro caso $a_n = c_n \rightarrow 2$ e $b_n \rightarrow +\infty$, quindi siamo nelle ipotesi della proposizione 2 e per (i) segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n c_n = +\infty.$$

Esercizio 2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 - 5n}{1 - n}.$$

Soluzione. Consideriamo la successione di termine generale $a_n = (2n^4 - 5n)/(1 - n)$. Osserviamo che abbiamo a che fare con una forma indeterminata ∞/∞ . La prima cosa da fare per eliminare l'indeterminazione quando si ha a che fare con termini generali a_n fratti è raccogliere il termine di grado maggiore. In questo caso il termine di grado maggiore del numeratore è n^4 , quello di grado maggiore nel denominatore invece è n , quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 - 5n}{1 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4(2 - 5/n^3)}{n(1/n - 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \frac{2 - 5/n^3}{1/n - 1}.$$

Chiamati ora $b_n = n^3$ e $c_n = (2 - 5/n^3)/(1/n - 1)$, abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -2 \neq 0,$$

allora per il punto (i) della proposizione 2 segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n c_n = +\infty.$$



Se il termine di grado maggiore è al numeratore del termine generale della successione, allora la successione diverge.

Esercizio 3. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^2 + n + 4}{3n^2 - 5}.$$

Soluzione. Consideriamo la successione di termine generale $a_n = (-2n^2 + n + 4)/(3n^2 - 5)$. Osserviamo che abbiamo ancora a che fare con una forma indeterminata ∞/∞ . In questo caso il termine di grado maggiore del numeratore è n^2 e coincide con quello di grado maggiore nel denominatore, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^2 + n + 4}{3n^2 - 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(-2 + 1/n + 4/n^2)}{n^2(3 - 5/n^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2 + 1/n + 4/n^2}{3 - 5/n^2}.$$

Posto $b_n = -2 + 1/n + 4/n^2$ e $c_n = 3 - 5/n^2$, con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 3,$$

quindi, combinando assieme i punti (ii) e (iii) della proposizione 1, segue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n} = -\frac{2}{3}.$$



Se il termine di grado maggiore del numeratore e quello del denominatore coincidono, allora la successione converge ad un limite finito.

Esercizio 4. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Soluzione. Consideriamo come sempre la successione di termine generale $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Siamo di fronte ad una forma indeterminata $+\infty - \infty$ che coinvolge delle radici. La prima cosa da fare in questi casi per tentare di rimuovere l'indeterminazione è razionalizzare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1 - n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

Il vantaggio evidente è che ora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

e visto che, posto $b_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \neq 0$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty,$$

per il punto (iii) del teorema 1 segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Teorema 2. Se a_n è una successione crescente e limitata superiormente dalla costante M , allora ammette limite finito L e $L \leq M$. Analogamente se a_n è una successione decrescente e limitata inferiormente dalla costante m , allora ammette limite finito L e $L \geq m$.

Esercizio 5. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

Soluzione. Per quanto avete visto a lezione, se riusciamo a dimostrare che questa successione è monotona crescente (decrescente) e limitata superiormente (inferiormente) allora possiamo affermare che il limite esiste ed è minore o uguale alla limitazione superiore (inferiore). In questo caso, tuttavia, il coseno è una funzione periodica e quindi in un certo senso “oscillante”, non c’è quindi speranza di provare la monotonia di questa successione. Come facciamo a capire qual’è il limite di questa successione? Ci ricordiamo che il coseno ha un’interessante proprietà di limitatezza:

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

Ma allora possiamo maggiorare il numeratore con 1 e minorarlo con -1 , ottenendo

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

e visto che sia $-1/n^2$ che $1/n^2$ tendono a 0 al crescere dell’indice n , per il teorema 1 segue che anche la nostra successione converge a 0.

Esercizio 6. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^n(1-n)}{1+n^2}.$$

Soluzione. Per capire se il limite esiste proviamo che la successione di termine generale $a_n = 7^n(1-n)/(1+n^2)$ è monotona e limitata. Per prima cosa verifichiamo se la successione è crescente, ci chiediamo cioè se, definitivamente

$$a_{n+1} > a_n.$$

Ora

$$a_{n+1} = \frac{7^{n+1}(1-n-1)}{1+(n+1)^2} = -\frac{7^n 7n}{n^2 + 2n + 2},$$

quindi la condizione da verificare diventa

$$-\frac{7^n 7n}{n^2 + 2n + 2} > \frac{7^n(1-n)}{1+n^2}.$$

Osserviamo che il denominatore è sempre positivo, quindi rimane da verificare quando il numeratore è positivo, cioè quando

$$-7^n(6n^3 - n^2 + 7n + 2) > 0.$$

Come si vede facilmente questa condizione non è mai verificata, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale quindi la disequazione con il verso contrario, cioè

$$a_{n+1} < a_n,$$

e abbiamo così dimostrato che la successione è decrescente.

A questo punto, se riusciamo a dimostrare che essa è anche limitata inferiormente dalla costante m , per il teorema 2 sappiamo che a_n ammette limite finito L , con $L \geq m$. Se però scriviamo a_n come

$$a_n = \frac{7^n}{1+n^2} - \frac{n7^n}{1+n^2} = b_n + c_n,$$

ci accorgiamo che $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi possiamo concludere che

$$a_n > c_n.$$

Ora

$$c_n = -\frac{n7^n}{1+n^2} \sim -\frac{7^n}{n},$$

perché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(1/n+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/n+n}$$


e, visto che $1/n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, l'ultimo limite equivale a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}.$$

Da quanto avete visto a lezione, la successione di termine generale c^n/n^d , $c, d \in \mathbb{R}$, al crescere di n diverge a $+\infty$. Nel nostro caso abbiamo $c = 7$, $d = 1$ e il segno davanti al termine generale è negativo, segue quindi che $-7^n/n$ al crescere di n diverge a $-\infty$, abbiamo così dimostrato che

$$a_n > -\infty,$$

abbiamo cioè trovato un'informazione inutile: ogni valore è maggiore di $-\infty$.

 Questo vuol far capire allo studente che l'operazione di maggiorare o minorare una successione non segue un algoritmo meccanico ma dipende caso per caso e si basa in gran parte sull'intuito. Come spesso succede in matematica, poi, l'intuito si può affinare eseguendo molti esercizi.

Cerchiamo una stima più efficace. Osservando a_n notiamo che, per $n > 0$, il denominatore è strettamente maggiore di 1, quindi

$$\frac{7^n(1-n)}{1+n^2} < 7^n(1-n).$$

Ora, per n grandi, possiamo tranquillamente sostituire $-n+1$ con $-n$ ed ottenere la stima

$$7^n(1-n) \sim -n7^n,$$

ma allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n7^n = -\infty,$$

quindi la successione non è limitata inferiormente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

Esercizio 7 (Algoritmo di Erone). Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Per prima cosa, per capire come funziona la definizione per ricorrenza di una successione, proviamo a calcolarne alcuni valori

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = 1.5, \\ a_2 &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} \approx 1.417, \\ a_3 &= \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{289+288}{408} = \frac{577}{408} \approx 1.4142, \\ a_4 &= \dots \end{aligned}$$

Nonostante il fatto che a noi interessa *sempre* il comportamento definitivo di una successione, e cioè cosa succede ad a_n per $n > N$, con $N \in \mathbb{N}$ fissato, possiamo affermare che, almeno a prima vista sembra che abbiamo a che fare con una successione decrescente. È proprio così? Vogliamo dimostrare che

$$a_{n+1} < a_n.$$

Ora $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$, quindi ci chiediamo quando vale

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < a_n,$$

cioè

$$\frac{1}{a_n} < \frac{a_n}{2}.$$

Per dimostrare che a_n è decrescente ci sono (almeno) due modi:

- Dalla precedente disequazione ricaviamo la condizione

$$\frac{2 - a_n^2}{2a_n} < 0,$$

che ha soluzione $a_n^2 < 2$, cioè $a_n < -\sqrt{2} \cup a_n > \sqrt{2}$, infatti il denominatore è sempre positivo. Osserviamo poi che, per come è stata definita, la successione a_n contiene sempre termini positivi, quindi possiamo limitare la soluzione a $a_n > \sqrt{2}$. Abbiamo appena trovato che la successione è decrescente se $a_n > \sqrt{2}$.

Se ora dimostrassimo che a_n è sempre maggiore di $\sqrt{2}$, avremmo dimostrato che, nell'intervallo dove la successione assegnata è decrescente, essa è anche limitata inferiormente. Ma allora grazie al teorema 2 potremmo concludere che essa ammette limite finito L , $L \geq \sqrt{2}$.

- Procediamo per induzione. La proposizione che vogliamo dimostrare è $P(n) = "a_n^2 > 2"$. Caso base:

$$a_1^2 = \frac{9}{4} > \frac{8}{4} = 2.$$

Passo induttivo: supponiamo che valga $a_n^2 > 2$ e vogliamo dimostrare che vale anche $a_{n+1}^2 > 2$. Per prima cosa notiamo che

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \right)^2 \\ &= \frac{(a_n^2 + 2)^2}{4a_n^2}. \end{aligned}$$

Notiamo ora che se riuscissimo a riscrivere il termine appena trovato come $2 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, allora avremo concluso, infatti seguirebbe banalmente che $a_{n+1}^2 > 2$:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \frac{(a_n^2 + 2)^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{(a_n^2 + 2)^2 - 8a_n^2 + 8a_n^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{(a_n^2 + 2)^2 - 8a_n^2}{4a_n^2} + \frac{8a_n^2}{4a_n^2} \\ &= \frac{a_n^4 + 4a_n^2 + 4 - 8a_n^2}{4a_n^2} + 2 \\ &= \frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2} + 2 \\ &> 2, \end{aligned}$$

abbiamo così provato che a_n è decrescente.

Passiamo ora alla dimostrazione della limitatezza inferiore. In particolare dimostriamo per induzione la proposizione $P(n) = "1 \leq a_n \leq 2"$. Caso base:

$$1 \leq a_1 = \frac{3}{2} \leq 2.$$

Passo induttivo: supponiamo che l'enunciato sia vero per n e cioè che valga $1 \leq a_n \leq 2$ e dimostriamo che questo implica $1 \leq a_{n+1} \leq 2$. Per prima cosa notiamo che, se $a_n \leq 2$ allora

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \leq \frac{2}{2} + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a_n},$$

inoltre da $a_n \geq 1$ segue

$$1 + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2$$

e quindi

$$a_{n+1} \leq 2.$$

Analogamente, se partiamo dall'ipotesi $a_n \geq 1$, segue

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Sfruttando ora l'altra ipotesi induttiva $a_n \leq 2$ troviamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

da cui segue

$$a_{n+1} \geq 1.$$

Abbiamo quindi trovato che la proposizione $P(n)$ è valida per ogni $n \geq 1$.

Ma allora per il teorema 2 sappiamo che la successione a_n ammette limite finito L , $L \geq 1$.

Ora se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L,$$

anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L,$$

ma allora dall'equazione di ricorrenza troviamo


$$L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L},$$


cioè $L^2 = 2$, che ammette soluzioni

$$L_1 = -\sqrt{2}, \quad L_2 = \sqrt{2}.$$

Ora $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi possiamo scartare L_1 , trovando così

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

 Questo esercizio vuol mostrare come le successioni numeriche siano state introdotte per il problema di approssimare certi valori, magari tramite numeri con cui ci troviamo più a nostro agio. In questo caso abbiamo una successione di numeri razionali, cioè della forma p/q , $p, q \in \mathbb{Z}$, che ci consente di stimare il valore del numero reale $\sqrt{2}$.

 Invito il lettore a provare ad implementare in un linguaggio di programmazione ad alto livello (Java, C, C++, ...) l'algoritmo di Erone per il calcolo di $\sqrt{2}$.