COGNOME ________ NOME ________ Matr. ________

Firma dello studente ____________________ **A**

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

Tempo: 3 ore.

Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:** Per quali valori dei parametri α e β si ha che

$$\lim_{x\to 0}\left(\alpha\frac{1-\cos x}{2x^2}+3\beta x\sin\frac{1}{x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\alpha\frac{1-\cos x}{2x^2}+3\beta x\sin\frac{1}{x}\right)=1$$

(A) $\alpha=4,\beta=1/3$ (B) $\alpha=4,\beta=-1/3$ (C) $\alpha=6,\beta=1/2$ (D) $\alpha=6,\beta=-1/2$

✎ **Test 2:** Sia $f(x)=2\sqrt{x}-x^2$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ nel punto di ascissa $x_0=1$ è:

(A) $y=3-2x$ (B) $y=\frac{x+1}{2}$ (C) $y=\frac{3x+1}{4}$ (D) $y=x$

✎ **Test 3:** Il valore minimo della funzione $f(x)=(2-x)e^x$ nell'intervallo $[1,3]$ è:

(A) e^3 (B) $-e^3$ (C) $-3e^3$ (D) $3e^3$

✎ **Test 4:** L'insieme dei numeri complessi z tali che $|z|<1$ e $|z-1|=|z-i|$ consiste in:

(A) un segmento (B) due punti (C) una semicirconferenza (D) un semipiano

✎ **Test 5:** Siano $g(y)=\frac{y^2}{1-y}$ e $f(x)=e^{-x}$. Allora l'insieme dove la funzione $(g\circ f)(x)$ (definita per $x\neq 0$) è decrescente è dato da:

(A) $x\geq -\log 2$ (B) $x\geq \log -\frac{1}{2}$ (C) $x\geq 2\log 2$ (D) $x\geq -2\log 2$

✎ **Test 6:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\log(1+x)}=?$$

(A) 1 (B) $+\infty$ (C) -1 (D) 0

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

Soluzione dei test:

✎ $\boxed{\textbf{Test 1:}}$ Usando i limiti notevoli, si ha, per $x \to 0$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

mentre, sempre per $x \to 0$

$$0 \leq |x| \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$$

quindi, dal teorema del confronto, si ha

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Perciò si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\alpha \frac{1-\cos x}{2x^2} + 3\beta x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

D'altra parte, per $x \to +\infty$ si ottiene (di nuovo dal teorema del confronto) che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\cos x}{2x^2} = 0$$

mentre di nuovo dai limiti notevoli, considerando che se $x \to +\infty$ allora $1/x \to 0^+$ si ottiene

$$x \sin \frac{1}{x} \to 1$$

quindi

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\alpha \frac{1-\cos x}{2x^2} + 3\beta x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3\beta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{1}{3}.$$

La risposta corretta è dunque la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 2:}}$ L'equazione della retta tangente al grafico della funzione g vale

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

dove $x_0 = 1$ e $g(x_0) = g(1) = \frac{1}{f(1)} = 1$. A questo punto, usando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

da cui, essendo $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} - 2x$ si ottiene

$$g'(1) = -\frac{f'(1)}{f(1)^2} = 1.$$

Alla fine dunque l'equazione della retta richiesta vale $y = x$ e perciò la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 3:}}$ Il punto di minimo (o di massimo) di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato si può trovare all'interno dell'intervallo (nei punti in cui si annulla la derivata prima), nei punti di non derivabilità della funzione o nei punti del bordo. Nel caso in esame, la funzione è sempre derivabile, quindi il punto di minimo richiesto si può trovare solo tra i punti interni all'intervallo che annullano la derivata o tra i punti del bordo. Si ha

$$f'(x) = (2-x)e^x - e^x = (1-x)e^x$$

da cui $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$. Per cui punti candidati ad essere punti di minimo per f sono $x = 1$ e $x = 3$, che sono poi i punti del bordo dell'intervallo. Essendo $f(1) = e$ e $f(3) = -e^3$ si ha che il punto di minimo è $x = 3$ e il valore minimo per f è $-e^3$. Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(B)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 4:}}$ La disequazione $|z| < 1$ rappresenta una cerchio nel piano di Gauss centrato nell'origine e di raggio 1 (bordo escluso); l'equazione $|z-1| = |z-i|$ rappresenta invece il luogo dei punti nel piano di Gauss equidistanti da $z = 1$ e da $z = i$, quindi l'asse del segmento, che coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante. L'intersezione dei due insiemi rappresenta un segmento, quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 5:}}$ Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$$

quindi

$$h'(x) = \frac{-2e^{-2x}(1-e^{-x}) - (e^{-x})e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{1}{(1-e^{-x})^2}[e^{-3x} - 2e^{-2x}].$$

Quindi l'insieme dove la funzione h è decrescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \leq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^{-3x} - 2e^{-2x} \leq 0 \iff \frac{1-2e^{x}}{e^{3x}} \leq 0 \iff e^{x} \geq 1/2 \iff x \geq \log(1/2) = -\log 2$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 6:}}$ Usando gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni $\sin x$ e $\log(1+x)$ arrestati al terzo ordine, cioè

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 0$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si studi il comportamento della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{n^2}-1\right)$$

Si tratta di una serie sempre a termini negativi, quindi può essere trattata con i metodi che si usando per le serie a termini non negativi, in particolare possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Dagli sviluppi di Taylor abbiamo che

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2}+o(z^2) \qquad z\to 0$$

quindi essendo $n\to\infty$ si ha che $1/n\to 0^+$ e pertanto si può dire che

$$\cos\frac{1}{n^2}\sim 1-\frac{1}{2n^4}.$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, si ha che la serie data si comporta come (nel senso che ha lo stesso carattere) la seguente serie numerica

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\frac{1}{2n^4} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge (serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1). Quindi dal criterio del confronto asintotico, anche la serie data converge.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Determinare per quali valori dei parametri α e β esiste il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{2x+3}}{x^\alpha\,|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)dx$$

Si osserva innanzitutto che la funzione integranda è non negativa e che presenta un problema sia in 0 che in 2. Quindi, usando il teorema di spezzamento, per esempio scriviamo

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{2x+3}}{x^\alpha\,|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+3}}{x^\alpha\,|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)dx + \int_1^2 \frac{\sqrt{2x+3}}{x^\alpha\,|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)dx =: I + II$$

Sia $x\to 0$. Si osserva che nell'intorno di zero, la funzione

$$\frac{\sqrt{2x+3}}{|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)$$

è continua e integrabile (in senso proprio! Non generalizzato!) e tale per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+3}}{|x-2|^\beta}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^\beta}\log^2\frac{1}{2}$$

quindi l'integrale I, per $x\to 0$, si comporta come

$$\int_0^1 c(\beta)\frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

dove $c(\beta)$ è una costante (dipendente da β), e quest'ultimo converge se $\alpha<1$ ed è integrale generalizzato per $\alpha>0$.
D'altra parte, per $x\to 2$ la funzione

$$\frac{\sqrt{2x+3}}{|x|^\alpha}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right)$$

è continua e integrabile (di nuovo in senso proprio, non generalizzato) e tale per cui

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+3}}{|x|^\alpha}\log^2\left(\frac{1}{3x+2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2^\alpha}\log^2\frac{1}{8}$$

quindi l'integrale II, per $x\to 2$, si comporta come

$$\int_1^2 c(\alpha)\frac{1}{|x-2|^\beta}\,dx$$

dove $c(\alpha)$ è una costante (dipendente da α), e quest'ultimo converge se $\beta<1$ ed è integrale generalizzato per $\beta>0$ (per vederlo meglio basta fare un cambio di variabile). Riassumendo l'integrale proposto esiste come integrale generalizzato e come tale converge per $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$.

✎ **Studio di funzione (8 punti)**

Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x+3|}}{2+3x^2}$$

(non è richiesto l'analisi della derivata seconda).

La funzione data è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre è sempre continua e strettamente positiva. Non ci sono dunque intersezioni con l'asse delle x mentre $f(0) = e^3/2 > 10$. Non ci sono simmetrie (la funzione non è né pari né dispari).
Vediamo i limiti agli estremi del dominio: dalla gerarchia degli infiniti si vede immediatamente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Sempre per la gerarchia degli infiniti non ci aspettiamo che ci possano essere asintoti obliqui.
Studiamo il segno della derivata prima. Distinguiamo due casi:
sia $x > -3$: allora

$$f(x) = \frac{e^{x+3}}{2+3x^2} \qquad f'(x) = \frac{e^{x+3}(2+3x^2) - 6xe^{x+3}}{(2+3x)^2} = \frac{e^{x+3}(3x^2-6x+2)}{(2+3x^2)^2}$$

quindi

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pertanto $x = 1 - 1/\sqrt{3}$ è punto di massimo locale mentre $x = 1 + 1/\sqrt{3}$ è punto di minimo locale per f; inoltre f è (strettamente) crescente per $-3 < x < 1 - 1/\sqrt{3}$ e per $x > 1 + 1/\sqrt{3}$ mentre f è (strettamente) decrescente per $1 - 1/\sqrt{3} < x < 1 + 1/\sqrt{3}$.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to-3^+} f'(x) = \frac{47}{841} << 1$$

quindi l'equazione della retta tangente al grafico per $x \to -3^+$ è

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

dove $m = \lim_{x\to-3^+} f'(x)$, $x_0 = -3$, $y_0 = 1/29$, cioè (si tratta della linea rossa nel grafico)

$$y = \frac{49}{841}x + \frac{170}{841}$$

Sia ora $x < -3$. Allora

$$f(x) = \frac{e^{-x-3}}{2+3x^2} \qquad f'(x) = \frac{e^{-x-3}(3x^2+6x+2)}{(2+3x^2)^2}$$

quindi

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{-3\pm\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

quindi nell'intervallo considerato la funzione è sempre decrescente.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to-3^-} f'(x) = \frac{11}{841}$$

quindi l'equazione della retta tangente al grafico per $x \to -3^-$ è

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

dove $m = \lim_{x\to-3^-} f'(x)$, $x_0 = -3$, $y_0 = 1/29$, cioè (si tratta della linea blu nel grafico)

$$y = -\frac{11}{841}x - \frac{4}{841}$$

Si evidenzia pertanto la presenza di un punto angoloso. Il grafico è quello rappresentato in figura.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

✎ **Tema: (5 punti)**

Si presentino alcuni risultati relativi a proprietà globali per funzioni continue su un intervallo, completando gli enunciati con opportuni esempi e/o applicazioni.

Per funzioni continue su un intervallo valgono alcuni risultati che si basano sull'assioma di continuità dei numeri reali, per cui sono fondamentalmente legati al fatto di studiare la funzione su un intervallo di $\mathbb{R}$ e perderebbero la loro validità se venisse considerato un intervallo di $\mathbb{Q}$.
Il primo risultato che andiamo a enunciare si chiama TEOREMA DEGLI ZERI e può essere utile per determinare gli zeri di una funzione, cioè per risolvere un'equazione del tipo $f(x) = 0$. Geometricamente questo problema corrisponde a trovare le ascisse dei punti di intersezione tra il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta $y = 0$. Questo sistema può avere infinite soluzioni reali, un numero finito di soluzioni o nessuna soluzione. Ogni soluzione si chiama ZERO di f.
Il teorema degli zeri dà alcune semplici condizioni sotto le quali esiste uno zero e anche il modo per calcolarlo.

(TEOREMA DEGLI ZERI) Sia f continua in $[a, b]$ con $f(a) f(b) < 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Se f strettamente monotona, lo zero unico.

La dimostrazione di questo risultato (che è una dimostrazione *costruttiva* nel senso che dà un metodo non solo per mostrare l'esistenza dello zero ma anche per costruirlo) si basa sul *metodo di bisezione*.
Il secondo risultato invece è di fondamentale importanza in particolar modo per i problemi di ottimizzazione.

(TEOREMA DI WEIERSTRASS) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (quindi le ipotesi del teorema sono: funzione continua su un intervallo chiuso e limitato). Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$ ossia esistono x_m e x_M appartenenti ad $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Osserviamo che le ipotesi del teorema sono tutte necessarie, nel senso che se si rimuove anche una sola delle ipotesi il teorema fallisce e si possono trovare opportuni controesempi. Infatti la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo aperto $(0, 1)$ non ha massimo né minimo (sarebbero 0 e 1 che sono rispettivamente estremo inferiore e superiore ma non sono raggiunti, non essendo f definita in quei punti). Per altro la funzione è continua su $(0, 1)$ però $(0, 1)$ è limitato ma non chiuso.
D'altra parte, la funzione $f(x) = x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ non ha ovviamente né massimo né minimo; per altro essa è continua ma l'insieme di definizione non è limitato.
Infine la funzione $f(x) = x$ per $x \in (0, 1)$ e $f(x) = 1/2$ per $x = 0$ e $x = 1$ è la funzione del primo esempio definita anche negli estremi dell'intervallo; per cui ora è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato ma non è continua. Infatti non ha massimo e minimo (di nuovo 0 estremo inferiore e 1 estremo superiore ma non sono raggiunti).
Infine il prossimo risultato si può riassumere dicendo che l'immagine di un intervallo è un intervallo o anche che una funzione continua su un intervallo non può avere una finestra sull'immagine.

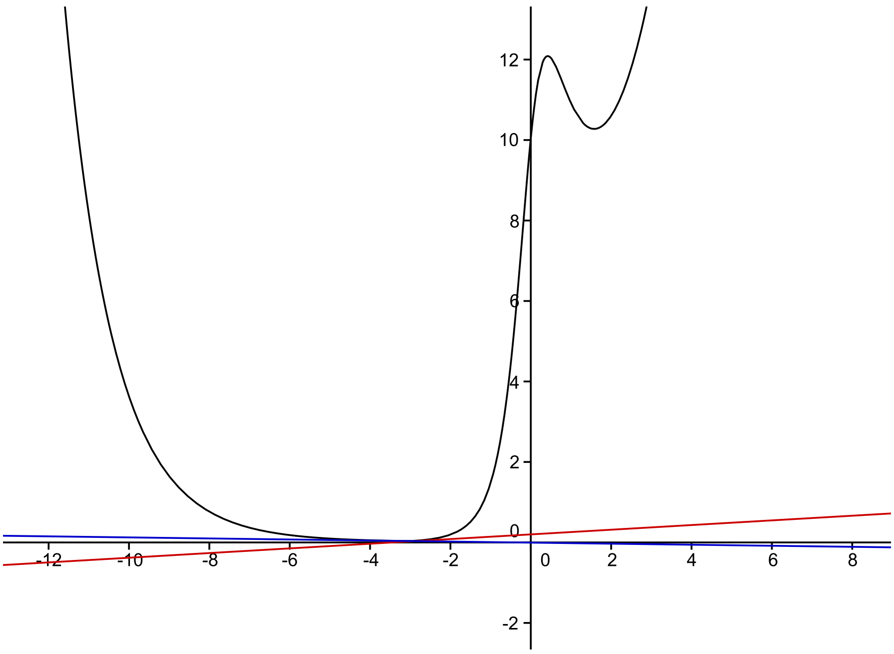
(TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI) Sia f una funzione continua su $[a, b]$. Allora per ogni λ tale che $m \leq \lambda \leq M$ con m minimo e M massimo di f su $[a, b]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = \lambda$.

Riassumendo

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f([a, b]) = [m, M]$, cioè l'immagine di un intervallo $[a, b]$ un intervallo di estremi

$$m = \min_{[a,b]} f \qquad M = \max_{[a,b]} f.$$

Esempio: la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = x^2$ non soddisfa la tesi del teorema dei valori intermedi. Infatti ad esempio $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ ma non è vero che tutti i valori tra 1 e 4 sono raggiunti; ad esempio non c'è nessuna controimmagine dei valori 2 o 3 (ci sarebbe $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ rispettivamente ma non stanno in $\mathbb{Q}$). Quindi *il teorema dei valori intermedi è vero per le funzioni continue definite su* $\mathbb{R}$ *grazie all'assioma di continuità verificata dall'insieme dei numeri reali.*


12
10
8
6
4
2
0
-2
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8