Esercitazione sui numeri complessi

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 13 Ottobre 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Prima di cominciare con gli esercizi diamo la seguente importante

Definizione 1 (Identità di Eulero)**.** Per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ si può definire l'esponenziale di un numero immaginario puro come

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta. \tag{$*$}$$

Esercizio 1. Scrivere il seguente numero complesso in forma trigonometrica

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

e rappresentarlo sul piano cartesiano.

Soluzione. Per poter scrivere un numero complesso in forma trigonometrica dobbiamo conoscere il suo modulo $|z|$ ed il suo argomento principale $\arg(z)$. Se pensiamo z come punto di $\mathbb{R}^2$, allora il modulo rappresenta la distanza del punto dall'origine, mentre l'argomento rappresenta l'angolo che esso forma con l'asse delle ascisse. In questo esercizio ed in quelli che seguiranno, per semplicità, scegliamo di considerare $\arg(z) \in [0, 2\pi)$. Per quanto avete visto a lezione risulta poi ovvio che, se $\arg(z)$ è l'argomento principale di z, anche $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, rappresenterà l'argomento (questa volta non principale) dello stesso numero complesso z.

Sempre a lezione avete visto che un numero complesso z è della forma $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Nel nostro caso in particolare abbiamo $x = \operatorname{Re}(z) = -1$, $y = \operatorname{Im}(z) = \sqrt{3}$, ma allora

$$\begin{aligned}
\rho &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2,\\
\vartheta &= \arg(z) = \operatorname{artan}\frac{y}{x} = \operatorname{artan}(-\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Il problema ora è che esistono due angoli nell'intervallo $[0, 2\pi)$ la cui tangente vale $-\sqrt{3}$, cioè $\vartheta_1 = 2\pi/3$ e $\vartheta_2 = 5\pi/3$, ma non è possibile che lo stesso punto sia individuato da due angoli diversi. Dovremo quindi scegliere quale tra i due candidati angoli è quello giusto. Come fare? La risposta è semplice: nel nostro caso $y = 1 > 0$, e solo ϑ_1 sta nel semipiano maggiore, ϑ_2 verrà quindi scartato.

Possiamo quindi finalmente scrivere z in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned}
z &= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),\\
&= 2\Big(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\Big),\\
&= 2e^{i\frac{2}{3}\pi},
\end{aligned}$$

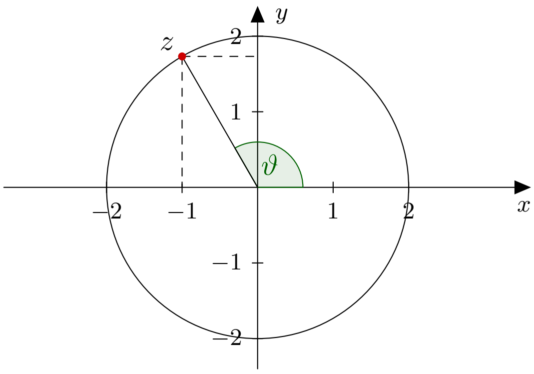

Figura 1: Rappresentazione del numero complesso $z = -1 + i\sqrt{3}$ sul piano cartesiano.

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità di Eulero ($*$). Infine in figura 1 si può trovare la rappresentazione di z sul piano cartesiano.

Osserviamo che, calcolare l'argomento principale $\arg(z)$ di un numero complesso z tramite la funzione arcotangente, come fatto nel precedente esercizio, o tramite il sistema

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}, \\ \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}, \end{cases}$$

è assolutamente equivalente.

Esercizio 2. Scrivere il seguente numero complesso in forma trigonometrica

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

e rappresentarlo sul piano cartesiano.

Soluzione. In questo caso si ha $z = x + iy$, con $x = \sqrt{3}/2$ e $y = 1/2$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1, \\ \vartheta &= \arg(z) = \operatorname{artan}\frac{y}{x} = \operatorname{artan}\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

L'equazione $\vartheta = \operatorname{artan}(1/\sqrt{3})$ ha soluzioni $\vartheta_1 = \pi/6$ e $\vartheta_2 = 7\pi/6$. Per capire qual'è l'angolo corretto tra i due usiamo l'accorgimento del precedente esercizio, ovvero $y = 1/2 > 0$ e tra le due candidate soluzioni solo ϑ_1 appartiene al semipiano superiore.

Possiamo quindi finalmente scrivere z in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \\ &= e^{i\frac{\pi}{6}}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità di Eulero ($*$). Infine in figura 2 si può trovare la rappresentazione di z sul piano cartesiano.

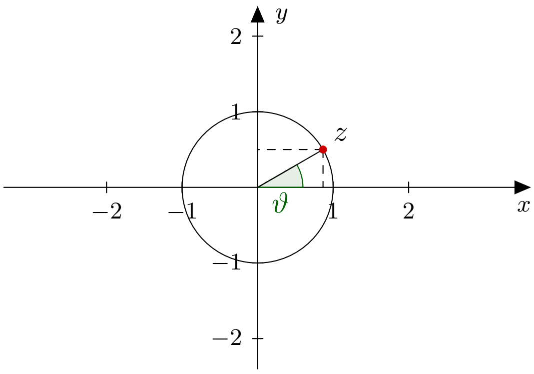

Figura 2: Rappresentazione del numero complesso $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ sul piano cartesiano.

Esercizio 3. Scrivere il seguente numero complesso in forma trigonometrica

$$z = \frac{1-i}{(1+i)^2}$$

e rappresentarlo sul piano cartesiano.

Soluzione. In questo caso si ha un quoziente tra numeri complessi, quindi per prima cosa si deve calcolare esplicitamente l'inverso del numero complesso che sta al denominatore, ovvero

$$\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{4} = -\frac{i}{2}.$$

Possiamo quindi riscrivere z come

$$z = -(1-i)\frac{i}{2} = -\frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

cioè $x = y = -1/2$. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \vartheta &= \arg(z) = \operatorname{artan}\frac{y}{x} = \operatorname{artan} 1 \end{aligned}$$

poiché $x = y$. Ora l'equazione $\vartheta = \operatorname{artan} 1$ ha soluzioni $\vartheta_1 = \pi/4$ e $\vartheta_2 = 5\pi/4$. Per capire qual'è l'angolo corretto tra i due usiamo il solito accorgimento: $y = -1/2 < 0$ e tra le due candidate soluzioni solo ϑ_2 appartiene al semipiano inferiore.

Possiamo quindi scartare ϑ_1 e scrivere z in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right), \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità di Eulero ($*$). Infine in figura 3 si può trovare la rappresentazione di z sul piano cartesiano.

Esercizio 4. Calcolare il prodotto tra il numero complesso $z_1 = -1+i$ e il numero complesso $z_2 = (1-i)/(1+i)^2$. Cosa succede da un punto di vista geometrico?

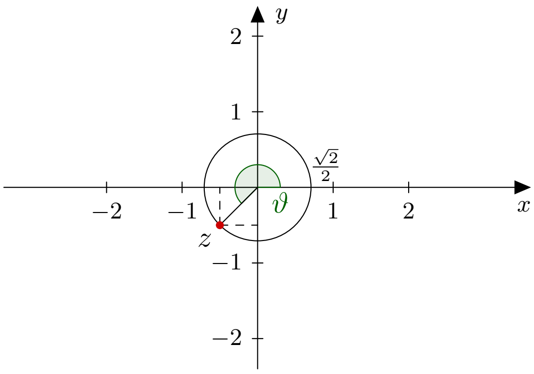

Figura 3: Rappresentazione del numero complesso $z = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ sul piano cartesiano.

Soluzione. Per rima cosa osserviamo che possiamo riscrivere il numero complesso assegnato come

$$-\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}$$

e svolgendo i quadrati troviamo

$$-\frac{-2i}{2i} = 1.$$

Il calcolo algebrico è banale, però è interessante capire come si può arrivare allo stesso risultato pensando di dover moltiplicare tra loro il vettore che punta a $z_1 = -1 + i$ con quello che punta a $z_2 = (1-i)/(1+i)^2 = -1/2 - i/2$, entrambi considerati applicati nell'origine.

In particolare se la rappresentazione trigonometrica di z_1 è

$$z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$

e quella di z_2 è

$$z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2),$$

allora, per le ben note proprietà di addizione di seno e coseno, vale

$$z_1 z_2 = [r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)][r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)] = r_1 r_2[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)].$$

Ora osserviamo che z_2 è il numero complesso del terzo esercizio, quindi ne conosciamo la rappresentazione trigonometrica:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= |z| = \frac{\sqrt{2}}{2},\\ \vartheta_2 &= \arg(z) = \frac{5}{4}\pi,\end{aligned}$$

mentre per z_1 dobbiamo svolgere per esteso i calcoli, trovando

$$\begin{aligned}\rho_1 &= |z| = \sqrt{2},\\ \vartheta_1 &= \arg(z) = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= \Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)\Big]\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\Big)\Big],\\ &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi,\\ &= 1.\end{aligned}$$

Quindi da un punto di vista geometrico il prodotto tra i vettori che rappresentano z_1 e z_2 corrisponde al vettore che ha per modulo il prodotto dei moduli, $\rho_1\rho_2$, e per argomento la somma degli argomenti, $\vartheta_1 + \vartheta_2$.

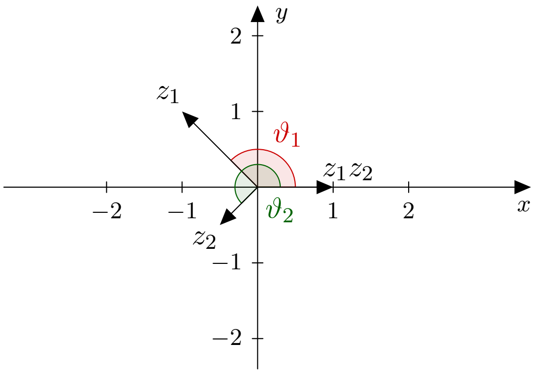

Figura 4: Rappresentazione geometrica del prodotto tra due numeri complessi z_1 e z_2.

In genere si conosce come rappresentare geometricamente la somma di due vettori, grazie alla *regola del parallelogramma*. Questo esercizio vuol insegnare come rappresentare geometricamente il prodotto di due vettori.

Esercizio 5. Descrivere geometricamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$|z - i| = 2.$$

Soluzione. Abbiamo già visto che un qualsiasi numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è della forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e può essere rappresentato come un punto del piano di coordinate (x, y). Abbiamo poi visto che il modulo di un numero complesso z rappresenta la distanza del punto del piano che gli corrisponde dall'origine. Nel nostro caso il numero complesso in questione è $w = z - i = x + i(y - 1)$, si può quindi reinterpretare il luogo dei $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z - i| = 2$ come il luogo dei punti del piano a distanza costante 2 dal punto del piano corrispondente al numero complesso i. Quindi la domanda diventa: qual'è quella figura geometrica che soddisfa questa proprietà? La risposta ovviamente è la circonferenza di equazione $x^2 + (y - 1)^2 = 4$, rappresentata in figura 5.

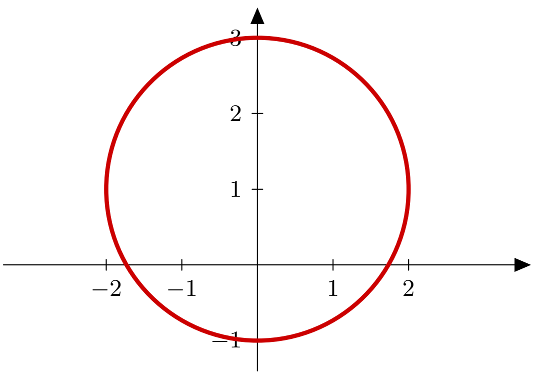

Figura 5: Luogo dei punti z del piano cartesiano tali che $|z - i| = 2$.

Di conseguenza se vi è chiesto di risolvere la disequazione $|z - i| \leq 2$, $z \in \mathbb{C}$, dovrete semplicemente trovare quei punti che distano da i non più di 2. La soluzione sarà quindi rappresentata da un qualsiasi z interno alla circonferenza centrata nel punto $(0, 1)$ e di raggio 2.

Esercizio 6. Descrivere geometricamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$\mathrm{Re}(z^2) = 1.$$

Soluzione. Se scriviamo z come $z = x + iy$, allora svolgendo i calcoli troviamo $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, cioè $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ e $\mathrm{Im}(z^2) = 2xy$. Di conseguenza possiamo reinterpretare la condizione $\mathrm{Re}(z^2) = 1$ come $x^2 - y^2 = 1$, che, come è noto dalla geometria analitica rappresenta un'iperbole di semiassi unitari, rappresentata in figura 6.

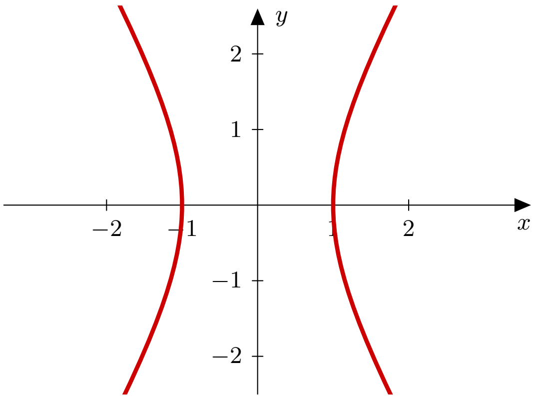

Figura 6: Luogo dei punti z del piano cartesiano tali che $\mathrm{Re}(z^2) = 1$.

Esercizio 7. Descrivere geometricamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$|z| \leq |z + 3|.$$

Soluzione. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, possiamo riscrivere la condizione $|z| \leq |z + 3|$ come $x^2 - y^2 \leq (x + 3)^2 - y^2$, dove abbiamo semplicemente calcolato i due moduli. Dopo una semplificazione troviamo la disequazione $6x + 9 \geq 0$ che ha soluzione $x \geq -3/2$. Tale equazione rappresenta il semipiano rappresentato in figura 7.

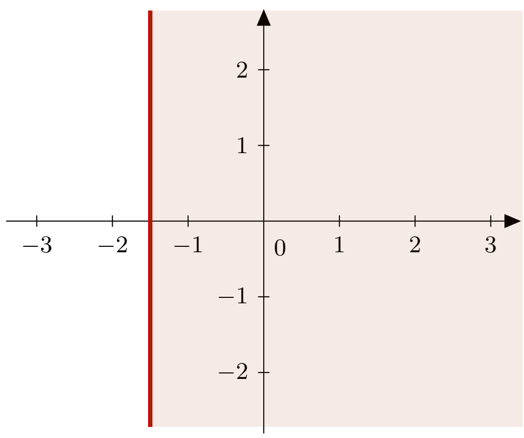

Figura 7: Luogo dei punti z del piano cartesiano tali che $|z| \leq |z + 3|$.

Esercizio 8. Descrivere geometricamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 2.$$

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il campo di esistenza (C.E.) della frazione è $z \neq -1$. Detto questo possiamo riscrivere la disequazione assegnata come

$$|z-1| \leq 2|z+1|$$

ed elevando entrambi i membri al quadrato otteniamo $|z-1|^2 \leq 4|z+1|^2$, cioè $|x-1+iy|^2 \leq 4|x+1+iy|^2$. Svolgendo i calcoli troviamo $(x-1)^2 + y^2 \leq 4(x+1)^2 + 4y^2$, cioè

$$x^2 + \frac{10}{3}x + 1y^2 + 1 \geq 0.$$

Osservando attentamente il termine a sinistra nella precedente disequazione si nota che i primi due termini si possono completare ad un quadrato sommando e sottraendo il numero $-16/9$, ottenendo così

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 \geq \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Si ha quindi che la soluzione è rappresentata dalla regione di piano costituita dai punti esterni alla circonferenza di centro $(-5/3, 0)$ e raggio $4/3$, come si può vedere in figura 8.

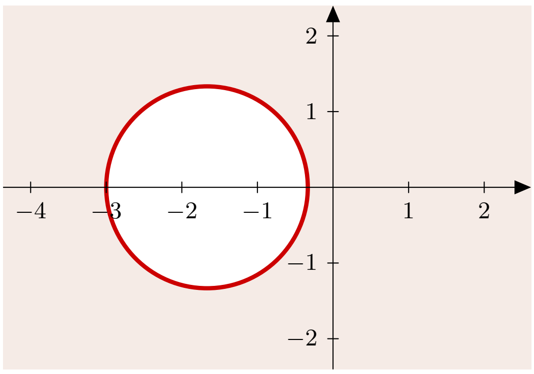

Figura 8: Luogo dei punti z del piano cartesiano tali che $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 2$.