COGNOME ____ NOME ____ Matr. ____

Firma dello studente ____ **B**

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 24.02.2012

Tempo: 3 ore.

<u>Prima parte: test a risposta multipla.</u> Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{2x}}{\sin 3x}$$

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

✎ **Test 2:** Uno solo dei quattro integrali impropri è convergente: quale?

(A) $\int_0^1 \frac{x}{\tan(x^2/2)}\,dx$ (B) $\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x + 1)}\,dx$ (C) $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{x}}\,dx$ (D) $\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx$

✎ **Test 3:** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile con derivata continua tale che $f(2)=0$. Allora

$$\int_0^1 \frac{f(x+1)}{x+1}\,dx$$

vale?

(A) $-\int_0^1 f'(x+1)\log(x+1)\,dx$ (B) $\log 2 - \int_0^1 f'(x+1)\log(x+1)\,dx$

(C) $-\int_0^1 f'(x+1)\,dx$ (D) $\log 2 - \int_0^1 f'(x+1)\,dx$

✎ **Test 4:** Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2\cos x}{y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Allora $y(\pi) =$

(A) $\sqrt[3]{7}$ (B) - $\sqrt[3]{5}$ (C) 0 (D) 1

✎ **Test 5:** Sia $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Allora l'insieme su cui è definita la funzione composta $(f\circ g)$ è?

(A) $x=-1$ (B) $x>-1$ (C) $x\neq -1$ (D) $x<-1$

✎ **Test 6:** Le soluzioni dell'equazione

$$(\bar{z}-i)^3 = 8i$$

sono?

(A) $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\sqrt{3}+i,\ z_3=-2i$ (B) $z_1=z_2=\sqrt{3}+i,\ z_3=-3i$

(C) $z_1=\sqrt{3}-2i,\ z_2=-\sqrt{3}-2i,\ z_3=i$ (D) $z_1=\sqrt{3}+2i,\ z_2=-\sqrt{3}+2i,\ z_3=-i$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 24.02.2012

Soluzioni dei test:

✎ $\boxed{\textbf{Test 1:}}$
Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{2x}}{\sin(3x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{2x}}{\sin(3x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow\atop 1}\frac{1}{3}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}-\underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\downarrow\atop 1}\frac{2x}{3x}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}\\ &= \frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 2:}}$ Si tratta in tutti e quattro i casi di integrali impropri dove la funzione integranda è non negativa, con un problema in 0. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to 0^+$

$$\frac{x}{\tan(x^2/2)}\sim\frac{2x}{x^2}\sim\frac{2}{x}$$
$$\frac{1}{\log(\sin x+1)}\sim\frac{1}{\sin x}\sim\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$\frac{1}{e^{2x}-1}\sim\frac{1}{2x}$$

quindi siccome l'integrale improprio

$$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

converge solo se $\alpha<1$ (per $\alpha>0$ è integrale improprio) allora si ha che la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 3:}}$ Operando un'integrazione per parti si ha

$$\int_0^1\frac{f(x+1)}{x+1}\,dx=\left[f(x+1)\,\log(x+1)\right]_0^1-\int_0^1 f'(x+1)\,\log(x+1)\,dx=-\int_0^1 f'(x+1)\,\log(x+1)\,dx$$

visto che per ipotesi $f(2)=0$ e dunque il termine $\left[f(x+1)\,\log(x+1)\right]_0^1$ si annulla. La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 4:}}$ Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Troviamo l'integrale generale e poi imponiamo il dato di Cauchy. Si ha

$$y^2\,dy=2\cos x\,dx$$

da cui passando alle primitive

$$\frac{y^3}{3}=-2\sin x+C$$

con $C\in\mathbb{R}$. Da cui, esplicitando la y

$$y^3=3C-6\sin x\qquad y(x)=\sqrt[3]{3C-6\sin x}$$

Imponendo il dato di Cauchy $y(0)=1$ si ha

$$y(0)=\sqrt[3]{3C}=1\qquad 3C=1\qquad C=\frac{1}{3}.$$

A questo punto la soluzione del precedente problema di Cauchy è

$$y(x)=\sqrt[3]{1-6\sin x}$$

quindi

$$y(\pi) = 1.$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 5:}}$ La funzione composta è definita dalla seguente legge:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x} + 1} = \sqrt{\frac{2}{1+x}}$$

si tratta quindi di dover risolvere la disequazione

$$\frac{2}{1+x} > 0 \iff x > -1$$

quindi la risposta corretta è $\boxed{\text{(B)}}$.

✎ $\boxed{\textbf{Test 6:}}$ Poniamo

$$w := \bar{z} - i$$

in questo modo l'equazione data diventa $w^3 = 8i$ che è equivalente dunque a cercare le radici terze del numero complesso $8i$ che è un numero complesso che ha modulo 2 e argomento $\frac{\pi}{2}$. Allora le tre radici di tale numero avranno modulo uguale alla radice cubica di 8, cioè 2 e argomenti rispettivamente pari a

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Quindi le tre radici cubiche di $8i$ (in forma trigonometrica)

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad w_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \qquad w_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

che corrispondono a (in forma algebrica)

$$w_1 = \sqrt{3} + i \qquad w_2 = -\sqrt{3} + i \qquad w_3 = -2i.$$

A questo punto, ricordando che $w = \bar{z} - i$ si ottiene

$$\bar{z}_1 = \sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_2 = -\sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_3 = -i$$

quindi passando ai coniugati si ottiene

$$z_1 = \sqrt{3} - 2i \qquad z_2 = -\sqrt{3} - 2i \qquad z_3 = i$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si calcoli

$$\int_0^{\pi^2} (3e^{\sqrt{x}} + 2\sin\sqrt{x})\,dx$$

Per linearità dell'integrale, svolgiamo i due integrali separatamente. Prima di tutto troviamo una primitiva delle funzioni integrande. Operiamo la seguente sostituzione

$$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

da cui

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^t t\,dt$$

quindi integrando per parti

$$2\int te^t\,dt = 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2(t-1)e^t.$$

A questo punto, tornando alla variabile originaria si ha

$$\int_0^{\pi^2} 3e^{\sqrt{x}}\,dx = 6[(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}]_0^{\pi^2} = 6[(\pi-1)e^{\pi}+1].$$

Analogamente, di nuovo con la medesima sostituzione e integrando di nuovo per parti si ha

$$2\int \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int 2t\sin t\,dt = 4[-t\cos t + \int \cos t\,dt] = -4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 4\sin\sqrt{x}$$

da cui

$$2\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = [-4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 4\sin\sqrt{x}]_0^{\pi^2} = 4\pi.$$

Riassumendo

$$\int_0^{\pi^2} (2e^{\sqrt{x}} + 3\sin\sqrt{x})\,dx = 6[(\pi-1)e^{\pi}+1] + 4\pi.$$

✎ **Esercizio (4 punti)**

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n^{\alpha}+1)\arctan\left(e^{\frac{1}{3n}} - 1\right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

La serie data è a termini non negativi, pertanto è possibile applicare ad esempio il criterio del confronto asintotico. Si ha per $n \to \infty$

$$e^{\frac{1}{3n}} - 1 \sim \frac{1}{3n}$$

da cui

$$\arctan\left(e^{\frac{1}{3n}} - 1\right) \sim e^{\frac{1}{3n}} - 1 \sim \frac{1}{3n}$$

per cui dal criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{\alpha}+1}{3n} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

A questo punto, siccome una serie a termini non negativi può solo convergere o divergere ma non essere irregolare, si ha che la serie di partenza diverge perché si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^{\alpha}+1}{3n}$ che è la somma di una serie a termini positivi che converge o diverge a seconda del valore di α (multiplo di una serie armonica generalizzata di esponente $\gamma = 1-\alpha$) e di un multiplo della serie armonica, che diverge sempre. Dunque la serie data diverge per ogni valore di α. Un errore sarebbe stato dire

$$n^{\alpha}+1 \sim n^{\alpha}$$

perché questo è vero se $\alpha > 0$ (altrimenti se $\alpha = 0$ si ha $n^{\alpha}+1 = 2$ e se $\alpha < 0$ si ha $n^{\alpha}+1 \sim 1$).

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 24.02.2012

✎ **Esercizio (8 punti)**

Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x-3}{\sqrt{x}-1}\right)$$

e se ne rappresenti il grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda. (Il logaritmo si intende in base e).

Il dominio della funzione proposta è dato dal sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-1} > 0 \end{cases}$$

in cui la prima condizione è per l'esistenza della radice, la seconda per l'esistenza del logaritmo. A questo punto

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}-1} > 0 \iff x < 1 \ \vee \ x > 3$$

quindi il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \ \vee \ x > 3 \end{cases}$$

quindi il dominio della funzione proposta è

$$0 \leq x < 1 \ \vee \ x > 3.$$

La funzione data non presenta simmetrie. Si ha

$$f(0) = \log 3$$

mentre

$$f(x) = 0 \iff \frac{x-3}{\sqrt{x}-1} = 1 \iff x - 3 - \sqrt{x} + 1 = 0 \iff x = 4.$$

Studiamo il segno della funzione. Si ha

$$f(x) > 0 \iff \frac{x-3}{\sqrt{x}-1} > 1 \iff \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} > 0 \iff \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{x-3} > 0 \iff 0 < x < 1 \ \vee \ x > 4.$$

Facciamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \log 3 > 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

e infine

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Studiamo il segno della derivata prima e la crescenza/decrescenza della funzione. Si ha:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\,\frac{\sqrt{x}-1-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{x-2\sqrt{x}+3}{(x-3)(\sqrt{x}-1)2\sqrt{x}}$$

quindi siccome stiamo studiando la funzione nel suo dominio (e quindi anche la derivata) si ha che

$$(x-3)(\sqrt{x}-1) > 0$$

(che sia il prodotto o il quoziente come nella funzione, il segno non cambia) quindi

$$f'(x) > 0 \iff 2\sqrt{x} - x - 3 < 0$$

e questa è sempre verificata. Quindi la funzione è sempre crescente. Il grafico qualitativo è illustrato in figura.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 24.02.2012

✎ **Tema: (5 punti)**

Scegliere uno dei due teoremi fondamentali del calcolo integrale: esporre l'enunciato chiarendo il significato dei termini che vi compaiono e le conseguenze principali di tale teorema.

Iniziamo a introdurre il concetto di primitiva. Se f è una funzione definita su un intervallo $[a,b]$, si dice che $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ è UNA PRIMITIVA DI f se G è derivabile su $[a,b]$ e si ha $G'(x)=f(x)$ per ogni $x\in[a,b]$.
Due primitive di una stessa funzione sullo stesso intervallo differiscono per una costante. La dimostrazione di questo fatto si basa in maniera essenziale sul fatto che siamo su un intervallo. Infatti dal fatto che $G_1'=G_2'$ non segue necessariamente che G_1-G_2 è costante, se si elimina la condizione che $[a,b]$ sia un intervallo. Ad esempio le funzioni

$$G_1(x)=\begin{cases}\log x & \text{se } x>0\\ \log(-x) & \text{se } x<0\end{cases}\qquad G_2(x)=\begin{cases}1+\log x & \text{se } x>0\\ \log(-x) & \text{se } x<0\end{cases}$$

hanno entrambe derivata $1/x$ su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ma la loro differenza non è una costante.
Esistono funzioni che non hanno primitive. Ad esempio la funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ da

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Si ha il seguente importante teorema.
Teorema (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) Sia f una funzione continua su un intervallo $[a,b]$, e sia G una sua primitiva su $[a,b]$. Allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)=[G(x)]_a^b=G(x)\Big|_a^b.$$

Si dice INTEGRALE INDEFINITO DI f, e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$, l'insieme di tutte le primitive di una funzione f rispetto alal variabile x, cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$. Invece la quantità $\int_a^b f(x)\,dx$ viene detta INTEGRALE DEFINITO di f da a a b.
Il problema del calcolo di integrali dunque si riconduce a quello di saper determinare le primitive di opportune classi di funzioni. Occorre però ricordare che non tutte le primitive riescono ad essere espresse in termini di funzioni elementari; ad esempio $\int e^{-x^2}\,dx$.

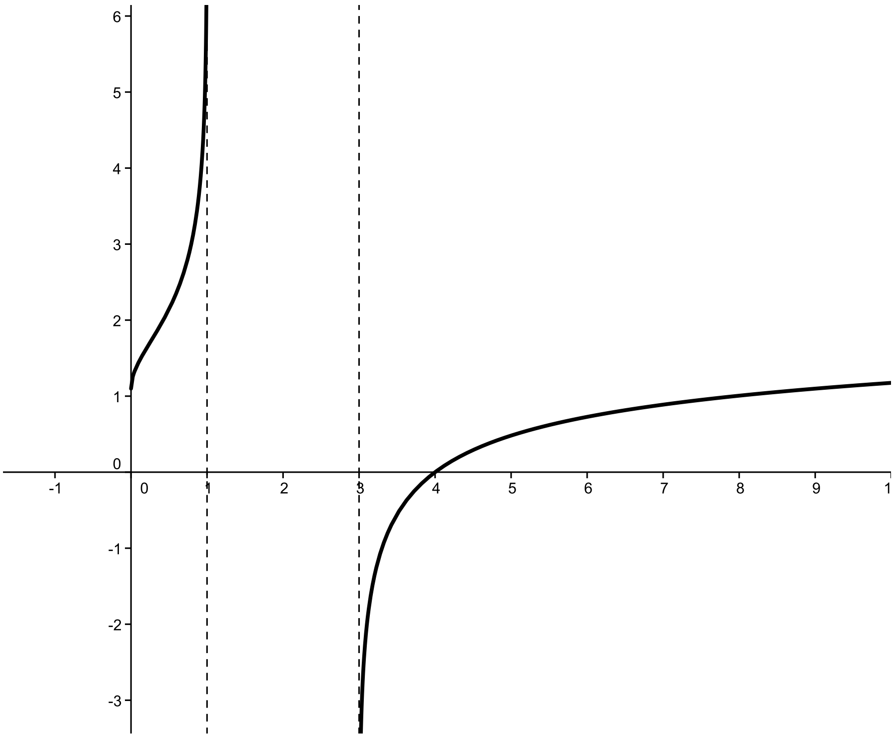
Sia ora f una funzione integrabile (anche in senso generalizzato). Consideriamo l'integrale di f su un intervallo che varia; quindi un estremo lo terremo fissato, per esempio x_0 e l'altro lo lasciamo variabile. Quindi la primitiva di f diventa una funzione di x. Nello specifico si ha la seguente definizione.
La funzione $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ si chiama FUNZIONE INTEGRALE DI f
Vale il seguente importantissimo teorema.
Teorema SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile (in senso proprio o generalizzato). Sia $x_0\in[a,b]$ e

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Allora si ha che:
1) la funzione F è continua in $[a,b]$
2) Se inoltre f è continua in $[a,b]$ allora F è derivabile in $[a,b]$ e vale

$$F'(x)=f(x)\qquad \forall x\in[a,b]$$

Si osserva che F ha sempre un grado di regolarità maggiore rispetto a f. Inoltre il teorema ci dice che ogni funzione continua ammette primitiva (che è la sua funzione integrale).



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
1