V.C. UNIFORME

La v.c. discreta UNIFORME descrive il modello probabilistico dell'*equiprobabilità*.

I valori della v.c.U. sono dati dai primi *n* numeri naturali:

x = 1, 2,…, (n-1), n

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{1}{n}$$

Sono soddisfatte le due condizioni affinchè *X* sia una v.c.; infatti:

$$p(x\ ) \geq 0$$

e

$$\sum_{x=1}^{n} p(x\ ) = 1$$

$$M(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$VAR(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

MODA(X): la distribuzione Uniforme è zeromodale.

ESERCIZIO

Descrivere con una v.c. il punteggio ottenibile nel lancio di un dado.

SOLUZIONI

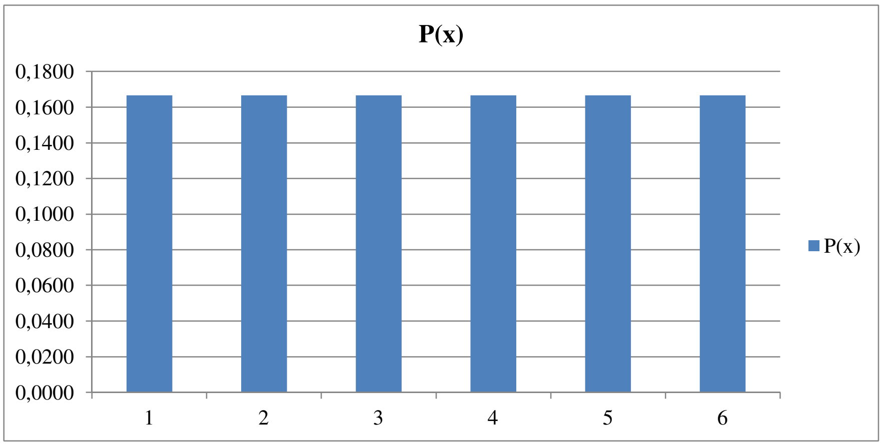
X v.c. uniforme con n=6: X=1,2,…,6 con P(X)=1/6

x	P(x)	x*P(x)	x^2*P(x)
1	0,1667	0,16667	0,16667
2	0,1667	0,33333	0,66667
3	0,1667	0,50000	1,50000
4	0,1667	0,66667	2,66667
5	0,1667	0,83333	4,16667
6	0,1667	1	6,00000
	1,0000	3,5	15,1667

VAR(X)=	2,91667

M(X)=3,5=$\frac{n+1}{2}$

VAR(X)=15,1667-$(3,5)^2$=$\frac{n^2-1}{12}$



V.C. BINOMIALE o SCHEMA BERNOULLIANO o SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE CON REINSERIMENTO

La v.c. BINOMIALE *X* descrive il numero di volte in cui accade l'evento E, di probabilità costante *p* (: *P(E)=p*), nelle *n* prove eseguite tutte nelle medesime condizioni (*n* prove indipendenti).

x = 0, 1, 2,…, (n-1), n

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Con $\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$ essendo *X* una v.c. discreta.

Media aritmetica: **M(x)=np**

Varianza: **V(x)=npq**

Moda: M(x)-q=**np-q≤MODA(x)≤np+p**=M(x)+p

La v.c. Binomiale dipende dal valore dei due parametri ***n*** e ***p***.

Quando n è abbastanza elevato (n→+∞) la v.c. B. converge alla v.c. Normale.

ESERCIZIO

Si consideri il seguente esperimento binomiale: si lancia 5 volte un dado e si conta quante volte esce la faccia con il numero 4.

Per questo esperimento binomiale si dica quali sono il successo, l'insuccesso, *p*, *q*, e si descriva tale variabile casuale binomiale (valori assunti e funzione di probabilità).

SOLUZIONI

Successo= esce 4 in un lancio.

Insuccesso= esce una qualunque altra faccia (1,2,3,5 o 6).

p=1/6

q=1-p=5/6

Tale v.c.Binomiale assume i seguenti valori: x=0,1,2,3,4,5. Infatti è n=5 il numero delle prove.

P(x)= $\binom{5}{x}(1/6)^x(5/6)^{5-x}$

ESERCIZIO

Costruire una variabile casuale capace di descrivere il numero di teste che si ottengono ripetendo per n=6 volte il lancio di una moneta ideale; calcolarne inoltre la media e la varianza sia usando i parametri della variabile sia operando su di essa.

SOLUZIONI

Si tratta di una v.c.binomiale X di parametri n=6 e p=1/2=0,5: infatti le prove consistenti nel lancio della moneta sono fra di loro indipendenti e il *successo* è dato dall'ottenere *testa*:

p= probabilità di ottenere testa nella singola prova= P(Testa)=1/2=0,5 con p=0,5 costante in ogni prova.

Operando sui parametri di X:

M(x)=np=6*0,5=3

V(x)=npq=6*0,5*0,5=1,5

Operando sulla v.c. discreta:

M(x)= $\sum_{x=0}^{6} xp(x) = \sum_{x=0}^{6} x\binom{6}{x}(0,5)^x(0,5)^{6-x} = (0,5)^6\sum_{x=0}^{6} x\binom{6}{x}$ = 0,015625*192=3

M(x^2)= $\sum_{x=0}^{6} x^2p(x) = \sum_{x=0}^{6} x^2\binom{6}{x}(0,5)^x(0,5)^{6-x} = (0,5)^6\sum_{x=0}^{6} x^2\binom{6}{x}$ = 0,015625*672= 10,5

V(x)= 10,5-$(3)^2$=1,5

ESERCIZIO *riguardante la v.c. Binomiale e la sua convergenza alla v.c. Normale*

Sia X una variabile casuale binomiale con p=0,35.

a) porre n=10 e calcolare P(x=3); P(x≥7); P(3≤x≤5).
b) Porre n=1000 e calcolare P(x=300); P(x≥700); P(349≤x≤351).

SOLUZIONI

a) si tratta di una v.c.Binomiale di parametri p=0,35 e n=10.

$$P(x=3)=\binom{10}{3}0.35^{3}0,65^{7}=0,2522$$

P(x≥7)=P(x=7)+ P(x=8)+ P(x=9)+ P(x=10)=0,026

P(3≤x≤5)= P(x=3)+ P(x=4)+ P(x=5)=0,6435

b) Una v.c. Binomiale di parametri p=0,35 e n=1000, numero delle prove molto elevato, potrebbe convergere ad una v.c.Normale. Per verificarlo consideriamo la quantità *npq*: se *npq è maggiore di 10* si può affermare che la variabile in considerazione converge ad una v.c.Normale.

   npq=1000*0,35*0,65=227,5 >10 quindi la v.c.Binom X converge ad una v.c.Normale X di parametri:

   M(x)=np=1000*0,35=350 e V(x)=npq=227,5 (σ=15,08).

   Per calcolare la probabilità di X nei vari intervalli richiesti bisogna fare la *correzione di continuità* poiché, con la convergenza, si è passati da una v.c. discreta (la Binomiale) ad una v.c. continua (la Normale).

$P(x=300)= P(299{,}5 \leq x \leq 300{,}5)= P(\frac{299{,}5-350}{15{,}08} \leq .u \leq \frac{300{,}5-350}{15{,}08})=$

$= P(-3{,}35 \leq u \leq -3{,}28)= P(+3{,}28 \leq u \leq +3{,}35)= P(0 \leq u \leq 3{,}35)-P(0 \leq u \leq 3{,}28)=$

$=0{,}50-0{,}4995=0{,}0005 \approx 0$

$P(x \geq 700)= P(x>699{,}5)= P(u>\frac{699{,}5-350}{15{,}08})= P(u>23{,}18)=0{,}50-P(0<u<23{,}18)=$

$=0{,}50-0{,}50=0$

$P(349 \leq x \leq 351)= P(348{,}5<x<351{,}5)= P(\frac{348{,}5-350}{15{,}08}<u<\frac{351{,}5-350}{15{,}08})=$

$=P(-0{,}1<u<+0{,}1)=2*P(0<u<+0{,}1)= 2*0{,}0398= 0{,}0796$

V.C. IPERGEOMETRICA o SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE SENZA REINSERIMENTO (O IN BLOCCO)

Una certa popolazione sia composta di N elementi dei quali C portatori di una data caratteristica, mentre i restanti N-C ne siano privi. Da questa popolazione si supponga di estrarre senza reinserimento n elementi.

Allora la v.c. IPERGEOMETRICA X descrive il numero di elementi del campione estratto che presentano la caratteristica in esame, ovvero X descrive il numero di volte in cui si presenta la caratteristica in esame nelle n prove dipendenti (o prove esaustive).

x = 0, 1, 2,…, (n-1), n (con n≤C)

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{\binom{C}{x}\binom{N-C}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Oppure:

$$P(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Con $\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1$ essendo *X* una v.c. discreta.

La v.c. Ipergeometrica dipende dal valore dei tre parametri ***N***, ***C*** (oppure ***p***=C/N) e ***n***.

Media aritmetica: **M(x)=np**

Varianza: $V(x) = npq\frac{(N-n)}{(N-1)}$

Dove $\frac{(N-n)}{(N-1)}$ è detto *fattore di correzione*.

Var(v.c.Binomiale)=npq **>** Var(v.c.Ipergeometrica)= $npq\frac{(N-n)}{(N-1)}$

Quando N→+∞ il *fattore di correzione* tende all'unità e quindi:

Var(v.c.Binomiale)=npq **=** Var(v.c.Ipergeometrica).

Inoltre, quando la dimensione della popolazione è infinita (nella pratica, quando **N>10000**) allora la v.c.Ipergeometrica **converge** alla v.c. Binomiale.

ESERCIZIO

Un corso di algebra è frequentato da 30 studenti, 16 uomini e 14 donne. Assumendo che tutti gli studenti frequentino il corso e che entrino nella classe a caso in modo indipendente dal fatto che siano uomini o donne, qual è la probabilità che i primi cinque studenti che entrano siano donne?

SOLUZIONI

Si tratta di uno schema Ipergeometrico con

N=30; C=14 (donne); N-C=30-14=16 (no donne, ovvero uomini); n=5.

$$P(x=5)= \frac{\binom{14}{5}}{\binom{30}{5}}\binom{16}{0} = 0{,}014$$

ESERCIZIO

Gli amministratori di una università vogliono mandare 8 studenti iscritti agli ultimi anni ad un convegno nazionale. Si presentano volontari 12 iscritti al terzo anno e 8 laureandi. I loro nomi vengono messi in un cappello e mescolati. Il rettore estrae a caso senza reinserimento gli 8 nomi. Qual è la probabilità che vengano estratti quattro studenti del terzo anno?

SOLUZIONI

Si tratta di uno schema Ipergeometrico con

N=20; C=12 (iscritti al III anno); N-C=8; n=8.

$$P(x=4)= \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}}{\binom{20}{8}} = 0{,}00393$$

ESERCIZIO

Deve essere formata una delegazione di 3 laureati da inviare ad uno scambio di esperienze con i colleghi dell'Università di Varsavia. La nostra delegazione viene formata estraendo a caso senza reinserimento 3 nomi dall'elenco di tutti i laureati dell' 89-90 della seguente Tabella:

Tabella dei laureati nella Facoltà di Economia nell'A.A. 89-90, classificati secondo il punteggio e l'indirizzo seguito

Indirizzo	Voto di Laurea			
	≤95	96-105	106-110	Lode
Aziendale	2	8	4	1
Economico	1	4	1	0
Giuridico	4	7	2	1
Tradizionale	6	2	3	2

Calcolare la probabilità che ci siano:

a) 2 dell'indirizzo Tradizionale;

b) 1 dell'indirizzo Aziendale;

c) almeno 1 dell'indirizzo Economico;

d) tutti e 3 con un voto maggiore di 95.

SOLUZIONI

Le probabilità richieste si calcolano utilizzando la v.c. Ipergeometrica con N=48 (totale dei laureati, ottenuto come somma delle frequenze congiunte della tabella), n=3 e x=0,1,2,3; il valore di C varia a seconda della probabilità richiesta:

a) C=13 tot. di laureati dell'indirizzo Tradizionale (è la frequenza marginale relativa alla modalità *tradizionale* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi N-C=35.

$$P(x=2)=\frac{\binom{13}{2}\binom{35}{1}}{\binom{48}{3}}=0,1578$$

b) C=15 tot. di laureati dell'indirizzo Aziendale (è la frequenza marginale relativa alla modalità *aziendale* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi N-C=33.

$$P(x=1)=\frac{\binom{15}{1}\binom{33}{2}}{\binom{48}{3}}=0,45791$$

c) C=6 tot. di laureati dell'indirizzo Economico (è la frequenza marginale relativa alla modalità *economico* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi N-C=42.

$$P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-\frac{\binom{6}{0}\binom{42}{3}}{\binom{48}{3}}=1-0,6637=0,3363$$

d) C=35= 48-13 (dove 13 è il tot. dei laureati con voto ≤95 e si ottiene come frequenza marginale relativa alla modalità *≤95* del carattere per colonna *voto di laurea*). N-C=48-35=13.

$$P(x=3)=\frac{\binom{35}{3}\binom{13}{0}}{\binom{48}{3}}=0,3784$$

V.C. DI POISSON o V.C. DEGLI EVENTI RARI

Dato un numero molto elevato di prove ***n***, eseguite tutte nelle medesime condizioni, la v.c. di POISSON *X* descrive il numero di volte in cui accade un evento casuale E, di probabilità infinitesima nella singola prova (: $P(E)=p\to 0$), dove sia noto il numero medio di volte ***m*** in cui il medesimo evento casuale accade.

La v.c. di Poisson si può ricondurre ad una v.c. Binomiale nella quale resti costante il numero medio di volte ($M(x)=np$) in cui si verifica E nelle *n* prove e il numero *n* di prove tenda all'infinito ($n\to+\infty$); da cui segue che la probabilità di E nella singola prova deve essere infinitesima (: $P(E)=p\to 0$):

$$\underbrace{\lim}_{\substack{n\to+\infty \\ np=m=k}} \underbrace{P(x)}_{v.c.Binomiale} = \underbrace{P(x)}_{v.c.Poisson}$$

x = 0, 1, 2,…, ∞

con funzione di probabilità associata:

$$P(x)=\frac{e^{-m}m^{x}}{x!} \quad \text{(con m>0)}$$

Con $\sum_{x=0}^{\infty} P(x)=1$ essendo *X* una v.c. discreta.

Media aritmetica: **M(x)=m**

Varianza: **V(x)=m**

Moda: **m-1≤MODA(x)≤m**

La v.c. di Poisson dipende dal valore dell'unico parametro ***m***.

Quando m>10 allora la v.c. di Poisson converge alla v.c. Normale.

ESERCIZIO

Ogni ora, sulle strisce pedonali, passano in media 30 automobili.

a) Qual è la probabilità che in un'ora nessuna automobile attraversi le strisce?

b) Qual è la probabilità che in un'ora le strisce siano attraversate da 4 automobili al massimo?

SOLUZIONI

Il numero di automobili che attraversano le strisce pedonali è descritto da una v.c. di Poisson di media M(x)=m=30:

x = 0, 1, 2,…, ∞

con funzione di probabilità:

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^{x}}{x!}$$

a) $P(x=0) = \dfrac{e^{-30} 30^{0}}{0!} = 0{,}0821$

b) $P(x \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} P(x) = 0{,}891$

ESERCIZIO

Il numero di chiamate telefoniche che arrivano in un'ora al centralino di un'azienda segue la distribuzione di Poisson con media *m=3*.

Descrivere tale v.c. calcolandone media, varianza e moda.

Calcolare la probabilità che durante un'ora

a) Non ci siano chiamate;

b) Ci sia almeno una chiamata;

c) Arrivino al massimo 3 telefonate;

d) Arrivino non meno di 2 telefonate.

SOLUZIONI

Il numero di telefonate per ora è descritto dalla v.c. di Poisson X: **x = 0, 1, 2,…, ∞.**

Con $P(x) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$

x	P(x)	x*P(x)	x^2*P(x)
0	0,0497871	0	0
1	0,1493612	0,1493612	0,1493612
2	0,2240418	0,4480836	0,8961672
3	0,2240418	0,6721254	2,0163762
4	0,1680314	0,6721256	2,6885024
5	0,1008188	0,5040940	2,5204700
6	0,0504094	0,3024564	1,8147384
7	0,0216040	0,1512280	1,0585960
>7	0,0119045	0,1005258	0,8557886
	1	3	12

$$M(x) = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = 3 = m$$

$$V(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x) - (3)^2 = 12 - 9 = 3$$

m-1=2≤MODA(x)≤m=3

Quindi tale v.c. di Poisson è bimodale: 2 e 3 (valori di X cui infatti corrisponde la massima probabilità 0,2240418).

a) P(x=0)=0,0497871

b) P(x≥1)= $\sum_{x=1}^{\infty} p(x)$ =1-P(x=0)=1- 0,0497871=0,9502129

c) P(x≤3)= $\sum_{x=0}^{3} p(x)$ =0,6472

d) P(x≥2)= $\sum_{x=2}^{\infty} p(x)$ =1-[P(x=0)+ P(x=1)]=0,8008

ESERCIZIO

Un negozio di vestiti vende un certo modello, in media, 2 volte la settimana.

Calcolare la probabilità che in una settimana:

a) Non si venda nessun vestito;

b) Si vendano più di 3 vestiti.

SOLUZIONI

Il numero di modelli venduti in una settimana è descritto da una v.c. di Poisson di media m=2:

X=0, 1, 2, …,∞.

a) $P(x=0)=\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}=0{,}135$

b) $P(x>3)=1-P(x\leq 3)=1-\sum_{x=0}^{3} p(x)$ =0,142878