

Firma dello studente _____

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) —
22.06.2012

Tempo: 3 ore.

Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

 **Test 1:**

I numeri complessi

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

sono le radici seste del numero

- (A) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$ (B) $4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ (D) $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$

 **Test 2:**

Se f è una funzione continua per cui vale $f(0) = -1$ e $f(1) = -2$ allora esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione seguente

- (A) $f(x) + 2 + x = 0$ (B) $f(x) - x^2 - 2 = 0$ (C) $f(x) + 3x = 0$ (D) $f(x) + x^2 - 2 = 0$

 **Test 3:**

Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora l'espressione

$$\forall a > 0, \exists b > 0, \text{ tale che } 0 < |x - 3| < b, \Rightarrow g(x) > a$$

è la definizione di:

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$ (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$ (C) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = +\infty$ (D) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

 **Test 4:**

Sia $f(t) = t^2$ e $g(s) = e^s$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico della funzione composta $g \circ f$ nel punto di ascissa $t_0 = 1$ è:

- (A) $y = 2\frac{x}{e} + \frac{3}{e}$ (B) $y = 2ex - e$ (C) $y = 2\frac{x}{e} + \frac{1}{e}$ (D) $y = 2ex - e^2$


 **Test 5:**

La funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + k & x \leq 0 \\ x^{1/x} & x > 0 \end{cases}$$

è continua ovunque se

- (A) $k = 0$ (B) $k = 1$ (C) $k = e$ (D) $k = -1$

 **Test 6:**

L'integrale $\int_0^\pi x |\cos x| dx$ è uguale a

- (A) π (B) 4π (C) 2π (D) 2

Test 1: Basta ricordare le formule che legano i moduli e gli argomenti di un numero complesso e delle sue radici. Dal Teorema 1.4.9 a pagina 26 delle dispense, se w è un numero complesso e z_i le sue radici, con $i = 1, \dots, n$ allora detto r il modulo di w e ρ_i il modulo degli z_i si ha prima di tutto $\rho_i = r^{1/n}$. Quindi nel nostro caso essendo $n = 6$ si ha che il modulo delle radici è $\sqrt[6]{2}$ quindi il modulo del numero complesso di origine deve per forza essere $(\sqrt[6]{2})^6 = 8$. D'altra parte, sempre per il Teorema 1.4.9, il primo argomento delle radici si trova dividendo per n (quindi nel nostro caso per 6) l'argomento del numero complesso di origine. Nel nostro caso il primo argomento delle radici lo leggiamo dalla formula risulta $\pi/8$ che moltiplicato per 6 dà $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Questo è l'argomento del numero complesso originario. D'altra parte

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi la risposta corretta è la **(B)**.

Test 2: L'esercizio è un'applicazione del teorema degli zeri. Consideriamo il primo caso, e poniamo $g(x) = f(x) + x + 2$. Trovare una soluzione dell'equazione proposta significa trovare uno zero di g . Siccome la funzione f è continua, anche g lo sarà. Andiamo a vedere se agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$ (perché l'esercizio dà i valori di f in 0 e in 1) la g assume valori di segno opposto. Si ha

$$g(0) = -1 + 2 > 0 \quad g(1) = -2 + 3 > 0$$

quindi in questo caso non possiamo concludere che esista una soluzione dell'equazione proposta. Nel secondo caso poniamo $g(x) = f(x) - x^2 - 2$ e in tal caso si ha

$$g(0) = -1 - 2 < 0 \quad g(1) = -2 - 1 < 0$$

e anche in questo caso non possiamo concludere nulla. Nel terzo caso poniamo $g(x) = f(x) + 3x$ e in tal caso si ha

$$g(0) = -1 < 0 \quad g(1) = -2 + 3 > 0$$

quindi in questo caso la funzione continua g assume valori opposti agli estremi dell'intervallo e pertanto per il teorema degli zeri, esiste x_0 tale che $g(x_0) = 0$ e cioè $f(x_0) + 3x_0 = 0$. La soluzione esatta è pertanto la **(C)**.

Test 3: Per la definizione di limite, la risposta corretta è la **(C)**.

Test 4: Scriviamo innanzitutto la funzione composta $h = g \circ f$ dove $h(t) = e^{t^2}$. A questo punto, l'equazione della retta tangente cercata risulta

$$y = y_0 + h'(t_0)(t - t_0)$$

dove $t_0 = 1$, $y_0 = h(t_0) = e$, $h'(t_0) = 2t_0e^{t_0} = 2e$. L'equazione richiesta è dunque $y = 2et - e$ e la risposta corretta è la **(B)**.

Test 5: Per verificare la continuità si deve avere che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

A questo punto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = k$$

mentre


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = 0$$

quindi la risposta corretta è la **(A)**.

Test 6: Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x |\cos x| dx &= \int_0^{\pi/2} x \cos x dx - \int_{\pi/2}^\pi x \cos x dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx - [x \sin x]_{\pi/2}^\pi + \int_{\pi/2}^\pi \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} + 1 = \pi. \end{aligned}$$

La risposta corretta è pertanto la **(A)**.

 **Esercizio (3 punti)**

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^{\pi}}.$$


Si tratta innanzitutto di una serie a termini positivi. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si ha che $\log(1+x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ quindi siccome $n \rightarrow \infty$ allora $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e pertanto

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Allora la serie data si comporta, per il criterio del confronto asintotico, come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi+1}}$$

che è la serie armonica generalizzata di esponente $\pi + 1 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie di partenza converge.

 **Esercizio (5 punti)**

Determinare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(e^{3x} - 1)(1 - \cos x)^{\alpha}} dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

Si tratta di un integrale improprio (con problema in 0) e funzione integranda non negativa. Quindi l'idea è quella di usare il teorema 8.9.10 a pagina 196 delle dispense cercando di confrontare l'integrale dato con un integrale più semplice, per esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta}} dx$$

che è integrale improprio se $\beta > 0$ e converge se $\beta < 1$. Quindi usiamo il fatto che per $x \rightarrow 0^+$

$$e^{3x} - 1 \sim 3x \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

e per il teorema citato l'integrale dato si comporta come l'integrale


$$\int_0^1 \frac{x^2}{3x \frac{x^{2\alpha}}{2^{\alpha}}} dx$$

che a sua volta (possiamo tralasciare le costanti che non incidono sul comportamento dell'integrale) si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x x^{2\alpha}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha+1-2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-1}} dx$$

e questo converge allora (ed è integrale improprio) se

$$0 < 2\alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

 **Esercizio (8 punti)**

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{|e^x - 3|}{\sqrt{2 - e^x}}$$

e rappresentare il grafico. Non è richiesta l'analisi della derivata seconda.

Il dominio della funzione è $2 - e^x > 0$ (esistenza della radice e del denominatore) che porta a $x < \log 2$. Osserviamo innanzitutto che

$$|e^x - 3| = \begin{cases} e^x - 3 & x \geq \log 3 \\ 3 - e^x & x < \log 3 \end{cases}$$

quindi tenendo conto del dominio, la prima condizione non è mai verificata e pertanto si può concludere che

$$f(x) = \frac{|e^x - 3|}{\sqrt{2 - e^x}} = \frac{3 - e^x}{\sqrt{2 - e^x}}.$$

La funzione quando esiste è sempre positiva e non si annulla mai (si annulla in un punto fuori dal dominio). Se invece $x = 0$ allora $f(0) = 2$. Non ci sono simmetrie (pari, dispari...)

Facciamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

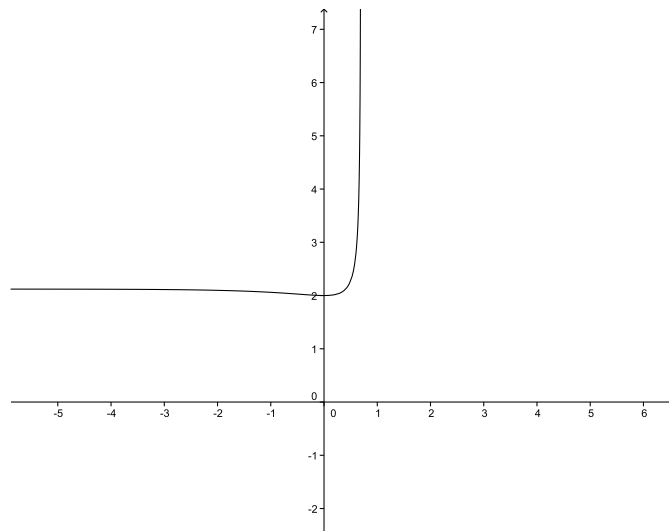
$$\lim_{x \rightarrow (\log 2)^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$


pertanto la funzione ammette un asintoto orizzontale a $-\infty$.

Andiamo ora a studiare la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{-e^x \sqrt{2 - e^x} - \frac{1}{2\sqrt{2 - e^x}} (-e^x) (3 - e^x)}{2 - e^x} = \frac{e^x [-2(2 - e^x) + 3 - e^x]}{2(2 - e^x)^{3/2}} = \frac{e^x (e^x - 1)}{2(2 - e^x)^{3/2}}.$$

Pertanto la funzione risulta crescente se $x > 0$ e decrescente se $x < 0$. In 0 abbiamo tangente orizzontale $f'(0) = 0$. Il grafico è quello mostrato in figura.



 **Tema: (5 punti)**

Si esponga quanto si sa circa le serie (definizioni, risultati, esempi, controesempi ecc...).

Si veda le dispense, Capitolo 7.