COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Firma dello studente ____________________

E

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

Tempo: 3 ore.

<u>Prima parte: test a risposta multipla.</u> Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:**

$$\int \frac{1}{x} \log\log x \, dx =$$

(il logaritmo si intende in base e)

(A) $\log x(\log\log x) - \log x + C$ (B) $\log\log x - 1 + C$ (C) $\log(\log(\log x)) + C$ (D) $\frac{1}{2}\log^2(\log x) + C$

✎ **Test 2:** Sia x_0 il punto di massimo per la funzione

$$f(x) = \arctan\sqrt{x} - \log(1+x)$$

sull'intervallo $[0, \pi^2+1]$ e $y_0 = f(x_0)$. Allora $4x_0$ vale?

(A) 1/4 (B) 1/2 (C) 1 (D) 2

✎ **Test 3:** Il polinomio di Mac Laurin di ordine 4 della funzione

$$(\cos(2x) - 1)^2 - 4\log(1+x^2)$$

vale?

(A) $-4x^2 - 4x^4$ (B) $-4x^2 + 6x^4$ (C) $-4x^2 + 2x^4$ (D) $-4x^2 - 2x^4$

✎ **Test 4:** Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+\cos^2(3x))}{1+e^{x^4-1}}$$

Allora $f'(\pi/6) =$?

(A) -6 (B) $\frac{1}{1+e^{(\pi/6)^4-1}}$ (C) -1 (D) 0

✎ **Test 5:** Sia $z = 1+2i$. Allora esprimere in forma algebrica il seguente numero complesso

$$\frac{(\bar{z})^2 + iz + 3}{z - |z|^2 i}$$

(A) $\frac{-11-9i}{10}$ (B) $\frac{7-9i}{10}$ (C) $\frac{-9-11i}{10}$ (D) $\frac{7i-9}{10}$

✎ **Test 6:** Il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{n+5} + 2\frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi} - \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}\right)$$

vale?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

Soluzione dei test:

✎ **Test 1:**
Proviamo ad operare la seguente sostituzione

$$\log x = t \qquad x = e^t \qquad dx = e^t\,dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x}\log(\log x)\,dx = \int \frac{1}{e^t}\log t\, e^t\,dt = \int \log t\,dt = t\log t - t + C = (\log x)(\log(\log x)) - \log x + C$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$ (N.B. è chiaro che derivando le quattro espressioni delle risposte si ottiene sicuramente quella che è la classe di primitive richieste).

✎ **Test 2:**
La funzione data è continua e derivabile su $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ con derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

che si annulla per $x = 1/4$. Valutando il segno della derivata prima si ottiene che la funzione prima cresce e poi decresce, perciò $x_0 = 1/4$ è il punto di massimo nell'intervallo richiesto. Quindi siccome viene richiesto il valore $4x_0$ si ha che la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Test 3:**
Usando gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni seno e logaritmo si ha che

$$(\cos(2x)-1)^2 = \left(\frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 4x^4 + o(x^4)$$

mentre

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

da cui

$$(\cos(2x)-1)^2 - 4\log(1+x^2) = 4x^4 - 4x^2 + 2x^4 + o(x^4) = -4x^2 + 6x^4 + o(x^4)$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(B)}}$.

✎ **Test 4:**
Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+\cos^2(3x)}2\cos(3x)(-\sin(3x))3\right)(1+e^{x^4-1}) - 4x^3(e^{x^4-1})\log(1+\cos^2(3x))}{(1+e^{x^4-1})^2}$$

da cui in modo evidente si ottiene $f'(\pi/6) = 0$, quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ **Test 5:**
Si ha

$$z = 1+2i \qquad \bar{z} = 1-2i \qquad (\bar{z})^2 = 1-4i-4 = -3-4i \qquad iz = i(1+2i) = i-2$$

da cui

$$\frac{(\bar{z})^2 + iz + 3}{z - |z|^2 i} = \frac{-3-4i+i-2+3}{1+2i-5i} = \frac{-2-3i}{1-3i}\,\frac{1+3i}{1+3i} = \frac{-2-6i-3i+9}{10} = \frac{7-9i}{10}$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(B)}}$.

Supponendo che non ci siano forme di indecisione, svolgiamo i tre limiti separatamente. Dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+5} = 3$$

invece dal teorema del confronto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} 2\frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi} = 0.$$

Infine

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(32+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\log\left(2+\frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

perché

$$\lim_{n \to +\infty} \log\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \log 2.$$

Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Esercizio (4 punti)** Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la seguente serie numerica?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \tan \frac{1}{n^4}}{2n^2 + n^3 \arctan \frac{1}{n}}$$

Si tratta senza dubbio di una serie a termini non negativi. Dai limiti notevoli si ottiene che, per $n \to \infty$

$$\tan \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^4} \qquad n^3 \arctan \frac{1}{n} \sim n^3 \frac{1}{n} = n^2$$

quindi dal criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^4(2n^2 + n^2)} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6-\alpha}}$$

che è una serie armonica generalizzata di esponente $\gamma = 6 - \alpha$ e dunque converge se $\gamma > 1$ cioè se $6 - \alpha > 1$ ossia $\alpha < 5$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{(e^{2x}-1)}} \log(1+t^2)\, dt$$

Primo modo: Proviamo a calcolare la primitiva della funzione $\log(1+t^2)$. Integrando per parti si ha

$$\int \log(1+t^2)\, dt = t \log(1+t^2) - \int \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt = t \log(1+t^2) - 2t + 2 \arctan t + C$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1+t^2)\, dt &= \left[t \log(1+t^2) - 2t + 2 \arctan t \right]_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \\ &= 2x(\sqrt{e^{2x}-1}) - 2(\sqrt{e^{2x}-1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x}-1}) \end{aligned}$$

A questo punto il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1+t^2)\, dt$$

diventa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x(\sqrt{e^{2x}-1}) - 2(\sqrt{e^{2x}-1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x}-1})}{\sin^{3/2}(2x)}$$

che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{2x} - 1 = 2x + o(x)$$

da cui

$$\sqrt{e^{2x}-1} = \sqrt{2x + o(x)} = \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$$

D'altra parte

$$\arctan(\sqrt{e^{2x}-1}) = \sqrt{e^{2x}-1} - \frac{1}{3}(\sqrt{e^{2x}-1})^3 + o((e^{2x}-1)^{3/2})$$

quindi riassumendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x(\sqrt{e^{2x}-1}) - 2(\sqrt{e^{2x}-1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x}-1})}{\sin^{3/2}(2x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \frac{2}{3}2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})}{2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})} = \frac{1}{3}.$$

Secondo modo: si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Proviamo ad applicare il teorema di de l'Hospital. Usando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1+t^2)\, dt \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{2x}-1)) \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}} e^{2x} 2}{3/2 \sqrt{\sin(2x)} \cos(2x) 2}$$

A questo punto dai limiti notevoli, per $x \to 0^+$ si ottiene

$$\log(1 + (e^{2x}-1)) \sim (e^{2x}-1) \sim (2x)$$

e

$$\sqrt{e^{2x}-1} \sim \sqrt{2x}$$

mentre

$$\sin^{1/2}(2x) \sim \sqrt{2x}$$

da cui

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{2x}-1)) \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}} e^{2x} 2}{3/2 \sqrt{\sin(2x)} \cos(2x) 2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2xe^{2x}}{\sqrt{2x} 3 \sqrt{2x} \cos(2x)} = \frac{1}{3}.$$

✎ **Esercizio (8 punti)**

Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{ex-3}{|x+e|}$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ex-3}{x+e} =: g(x) & x \geq -e \\ \dfrac{ex-3}{-x-e} =: h(x) & x < -e \end{cases}$$

Il dominio della funzione assegnata è $x \neq -e$. Il numeratore è positivo per $x > 3/e$, negativo altrimenti mentre il denominatore è sempre per la definizione di valore assoluto. Quindi $f(x) > 0$ per $x > 3/e$, $f(x) < 0$ altrimenti. I punti di intersezione con gli assi sono $(3/e, 0)$ e $(0, -3/e)$.
La retta $x = -e$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata, infatti

$$\lim_{x \to -e^-} f(x) = \lim_{x \to -e^-} h(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -e^+} f(x) = \lim_{x \to -e^+} g(x) = -\infty,$$

inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ex}{x+e} - \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+e} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{1+e/x} = e,$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -g(x) = -e.$$

La derivata prima di $f(x)$ è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e(x+e) - ex + 3}{(x+e)^2} = \dfrac{3+e^2}{(x+e)^2} & \text{se } x > -e \\ -\dfrac{3+e^2}{(x+e)^2} & \text{se } x < -e, \end{cases}$$

Si vede quindi chiaramente che $f'(x) > 0$ per $x > -e$, $f'(x) < 0$ altrimenti, quindi la funzione è decrescente per $x < -e$ e crescente per $x > -e$. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(3+e^2)}{(x+e)^3} & \text{se } x > -e \\ \dfrac{2(3+e^2)}{(x+e)^3} & \text{se } x < -e, \end{cases}$$

quindi, se $x > -e$, $f''(x) < 0$ e, di conseguenza, la funzione è concava. Lo stesso accade se $x < -e$, quindi, dove esiste, la funzione è concava. In figura 1 riportiamo il grafico di tale funzione.

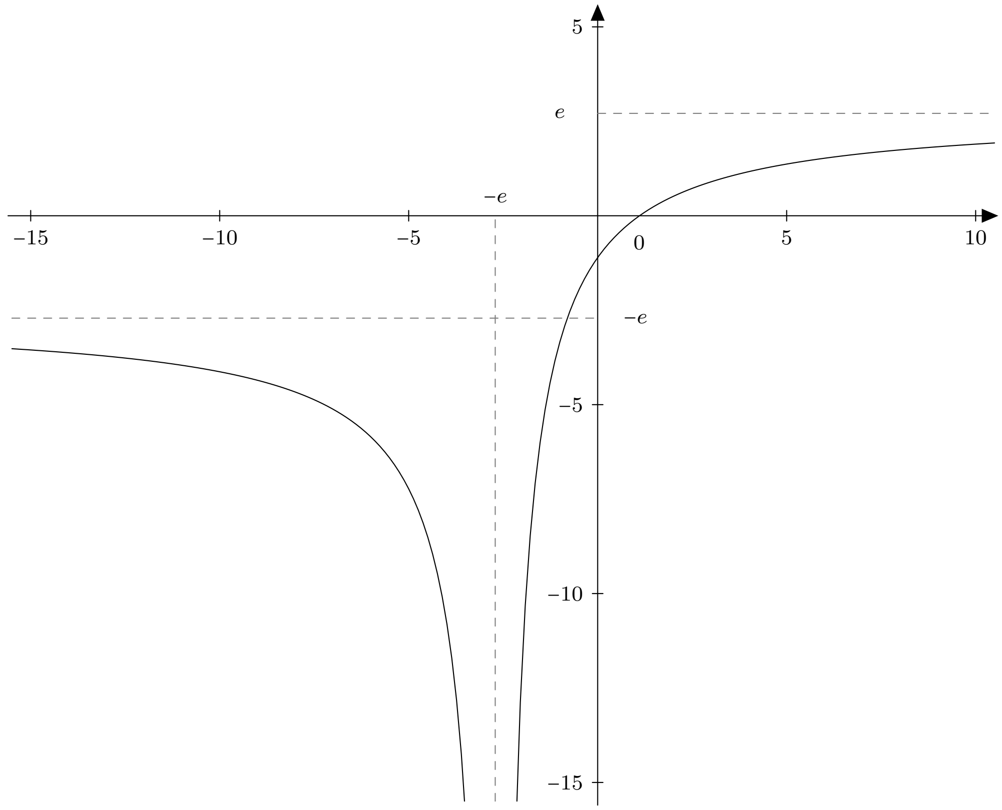

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = (ex - 3)/|x + e|$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Tema: (5 punti)**

Si esponga quanto si sa riguardo i limiti di successioni, con particolare riferimento alle successioni monotone, illustrando almeno un risultato che ha come ipotesi questa proprietà. Si faccia anche qualche esempio o controesempio.

Una successione $\{a_n\}_n$ si dice LIMITATA SUPERIORMENTE se esiste M tale che $a_n \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si dice LIMITATA INFERIORMENTE se esiste m tale che $a_n \ge m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si dice LIMITATA se è limitata inferiormente e superiormente. Tali proprietà possono anche valere definitivamente (cioè da un certo $\bar{n}$ in poi). In particolare una successione definitivamente limitata è limitata; infatti si ha il seguente risultato:
Proposizione: sia $\{a_n\}_n$ una successione; se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che definitivamente $a_n \le M$ $[[\ge M$]]allora la successione $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente [[inferiormente]].
Esempi: $\{n^2\}$ è *limitata inferiormente ma non superiormente*, $\{(-1)^n\}$ è *limitata*, $\{(-2)^n\}$ *non è limitata.*
Una successione $\{a_n\}_n$ si dice CONVERGENTE se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ con questa proprietà

$$\forall \varepsilon \text{ definitivamente } |a_n - \ell| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N\ |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il numero ℓ si chiama LIMITE DELLA SUCCESSIONE e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to \ell \text{ per } n \to \infty$$

Teorema Il limite di una successione, se esiste, è unico.
Graficamente: una successione tende a ℓ se fissata una striscia orizzontale centrata in ℓ e di semiampiezza ε (fissata una striscia orizzontale $[\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon]$ "comunque stretta"), da un certo indice in poi i punti della successione non escono dalla striscia; infatti

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Conseguenza importante: *Ogni successione convergente è limitata.* Intuitivamente: da un certo punto in poi, tutti i punti della successione stanno in una striscia, quindi la successione è definitivamente limitata; prima rimangono fuori solo un numero finito di punti, quindi si prende il massimo di questi in valore assoluto e questo costituisce il limite superiore (e con il segno contrario anche il limite inferiore). Si noti che non vale il viceversa. Esistono infatti successioni limitate ma non convergenti. Controesempio: $a_n = (-1)^n$.
Una successione si dice DIVERGENTE A $+\infty$ se

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N\ a_n > M$$

Una successione si dice DIVERGENTE A $-\infty$ se

$$\forall \overline{M} < 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \ a_n < \overline{M}$$

In tal caso $+\infty$ o $-\infty$ sono i limiti delle successioni divergenti e scriveremo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Una successione che non ammette limite si dice IRREGOLARE O INDETERMINATA. Esempio: $n \mapsto (-1)^n$. Una successione che tende a zero si dice INFINITESIMA. Una successione divergente (positivamente o negativamente) si dice INFINITA.
Un risultato importante coinvolge la proprietà di monotonia per la successione.
Una successione $\{a_n\}$ è MONOTONA CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$; diremo che essa è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$; diremo che essa MONOTONA DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$; diremo infine che essa è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$.
Ad esempio $n \mapsto n^2$ è monotona strettamente crescente; $n \mapsto \frac{1}{n}$ monotona strettamente decrescente; $n \mapsto (-1)^n$ non è monotona.
Vale il seguente importante risultato.
Teorema: Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata. Allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Analogamente se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità dei numeri reali e quindi vale se siamo in $\mathbb{R}$. Ad esempio, non è vero che una successione crescente e limitata di numeri razionali ammette sempre limite razionale. Come conseguenza si ha che:
sia $\{a_n\}$ una successione monotona e crescente. Allora esiste

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

analogamente sia $\{a_n\}$ una successione monotona e decrescente. Allora esiste

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esplicitamente: se $\{a_n\}$ è superiormente limitata allora converge a un numero reale; se è superiormente illimitata allora diverge. Quindi *una successione monotona converge o diverge; non pu essere irregolare.*