COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Firma dello studente ____________________

C

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

Tempo: 3 ore.

Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:** Sia x_0 il punto di massimo per la funzione

$$f(x) = \arctan\sqrt{x} - \log(1+x)$$

sull'intervallo $[0, e^2+1]$ e $y_0 = f(x_0)$. Allora $8x_0$ vale?

(A) 1 (B) 1/2 (C) 1/4 (D) 2

✎ **Test 2:** Il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{n+1} + \frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi} - \sqrt[n]{3+\frac{1}{n}}\right)$$

vale?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

✎ **Test 3:** Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+\cos^2(4x))}{1+e^{x^3-1}}$$

Allora $f'(\pi/8)$ =?

(A) -4 (B) $\dfrac{1}{1+e^{(\pi/8)^3-1}}$ (C) -1 (D) 0

✎ **Test 4:** Sia $z = 2 - i$. Allora esprimere in forma algebrica il seguente numero complesso

$$\frac{(\bar{z})^2 - iz - 3}{z - 1 + |z|^2 i}$$

(A) $\dfrac{-9+6i}{17}$ (B) $\dfrac{6i+7}{17}$ (C) $\dfrac{6+7i}{17}$ (D) $\dfrac{6i+9}{17}$

✎ **Test 5:**

$$\int \frac{1}{x}\log\log x\,dx =$$

(il logaritmo si intende in base e)

(A) $\log x(\log\log x) - \log x + C$ (B) $\dfrac{1}{2}\log^2(\log x) + C$ (C) $\log(\log(\log x)) + C$ (D) $\log\log x - 1 + C$

✎ **Test 6:** Il polinomio di Mac Laurin di ordine 4 della funzione

$$(\cos(2x) - 1)^2 - 4\log(1+x^2)$$

vale?

(A) $-4x^2 - 4x^4$ (B) $-4x^2 + 6x^4$ (C) $-4x^2 + 2x^4$ (D) $-4x^2 - 2x^4$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

Soluzione dei test:

✎ **Test 1:**

La funzione data è continua e derivabile su $\mathbb{R}^+$ con derivata

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

che si annulla per $x = 1/4$. Valutando il segno della derivata prima si ottiene che la funzione prima cresce e poi decresce, perciò $x_0 = 1/4$ è il punto di massimo nell'intervallo richiesto. Quindi siccome viene richiesto il valore $8x_0$ si ha che la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ **Test 2:**

Supponendo che non ci siano forme di indecisione, svolgiamo i tre limiti separatamente. Dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$$

invece dal teorema del confronto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi} = 0.$$

Infine

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log\left(3+\frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(3+\frac{1}{n}\right) = \log 3.$$

Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Test 3:**

Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+\cos^2(4x)} 2\cos(4x)\sin(4x)4\right)(1+e^{x^3-1}) - 3x^2(e^{x^3-1})\log(1+\cos^2(4x))}{(1+e^{x^3-1})^2}$$

da cui in modo evidente si ottiene $f'(\pi/8) = 0$, quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ **Test 4:**

Si ha

$$z = 2-i \qquad \bar{z} = 2+i \qquad (\bar{z})^2 = 4-1+4i = 3+4i \qquad iz = i(2-i) = 2i+1$$

da cui

$$\frac{(\bar{z})^2 - iz - 3}{z - 1 + |z|^2 i} = \frac{3+4i-2i-1-3}{2-i-1+5i} = \frac{-1+2i}{1+4i}\,\frac{1-4i}{1-4i} = \frac{-1+4i+2i+8}{10} = \frac{7+6i}{17}$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(B)}}$.

✎ **Test 5:**

Proviamo ad operare la seguente sostituzione

$$\log x = t \qquad x = e^t \qquad dx = e^t\,dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x}\log(\log x)\,dx = \int \frac{1}{e^t}\log t\, e^t\,dt = \int \log t\,dt = t\log t - t + C = (\log x)(\log(\log x)) - \log x + C$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$ (N.B. è chiaro che derivando le quattro espressioni delle risposte si ottiene sicuramente quella che è la classe di primitive richieste).

✎ **Test 6:**

Usando gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni seno e logaritmo si ha che

$$(\cos(2x)-1)^2 = \left(\frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = 4x^4 + o(x^4)$$

mentre

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

da cui

$$(\cos(2x)-1)^2 - 4\log(1+x^2) = 4x^4 - 4x^2 + 2x^4 + o(x^4) = -4x^2 + 6x^4 + o(x^4)$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(B)}}$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Esercizio (4 punti)** Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la seguente serie numerica?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \sin \frac{1}{n^5}}{6n^2 + n^4 \tan \frac{1}{n^2}}$$

Si tratta senza dubbio di una serie a termini non negativi. Dai limiti notevoli si ottiene che, per $n \to \infty$

$$\sin \frac{1}{n^5} \sim \frac{1}{n^5} \qquad n^4 \tan \frac{1}{n^2} \sim n^4 \frac{1}{n^2} = n^2$$

quindi dal criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^5(6n^2 + n^2)} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7-\alpha}}$$

che è una serie armonica generalizzata di esponente $\gamma = 7 - \alpha$ e dunque converge se $\gamma > 1$ cioè se $7 - \alpha > 1$ ossia $\alpha < 6$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{(e^{2x}-1)}} \log(1 + t^2)\, dt$$

Primo modo: Proviamo a calcolare la primitiva della funzione $\log(1 + t^2)$. Integrando per parti si ha

$$\int \log(1 + t^2)\, dt = t \log(1 + t^2) - \int \frac{2t^2}{1 + t^2}\, dt = t \log(1 + t^2) - 2t + 2 \arctan t + C$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1 + t^2)\, dt &= \left[t \log(1 + t^2) - 2t + 2 \arctan t\right]_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \\ &= 2x(\sqrt{e^{2x} - 1}) - 2(\sqrt{e^{2x} - 1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x} - 1}) \end{aligned}$$

A questo punto il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1 + t^2)\, dt$$

diventa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x(\sqrt{e^{2x} - 1}) - 2(\sqrt{e^{2x} - 1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x} - 1})}{\sin^{3/2}(2x)}$$

che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{2x} - 1 = 2x + o(x)$$

da cui

$$\sqrt{e^{2x} - 1} = \sqrt{2x + o(x)} = \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$$

D'altra parte

$$\arctan(\sqrt{e^{2x} - 1}) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \frac{1}{3}(\sqrt{e^{2x} - 1})^3 + o((e^{2x} - 1)^{3/2})$$

quindi riassumendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x(\sqrt{e^{2x} - 1}) - 2(\sqrt{e^{2x} - 1}) + 2 \arctan(\sqrt{e^{2x} - 1})}{\sin^{3/2}(2x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \frac{2}{3}2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})}{2\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})} = \frac{1}{3}.$$

Secondo modo: si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Proviamo ad applicare il teorema di de l'Hospital. Usando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^{3/2}(2x)} \int_0^{\sqrt{e^{2x}-1}} \log(1 + t^2)\, dt \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{2x} - 1)) \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}} e^{2x} 2}{3/2 \sqrt{\sin(2x)} \cos(2x) 2}$$

A questo punto dai limiti notevoli, per $x \to 0^+$ si ottiene

$$\log(1 + (e^{2x} - 1)) \sim (e^{2x} - 1) \sim (2x)$$

e

$$\sqrt{e^{2x} - 1} \sim \sqrt{2x}$$

mentre

$$\sin^{1/2}(2x) \sim \sqrt{2x}$$

da cui

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{2x} - 1)) \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-1}} e^{2x} 2}{3/2 \sqrt{\sin(2x)} \cos(2x) 2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x e^{2x}}{\sqrt{2x} 3 \sqrt{2x} \cos(2x)} = \frac{1}{3}.$$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Esercizio (8 punti)**

Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{ex+2}{|x-e|}$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ex+2}{x-e} =: g(x) & x \geq e \\ \dfrac{ex+2}{e-x} =: h(x) & x < e \end{cases}$$

Il dominio della funzione assegnata è $x \neq e$. I punti di intersezione con gli assi sono $(-2/e, 0)$ e $(0, 2/e)$. Il denominatore è sempre positivo per la definizione di valore assoluto, il numeratore è positivo per $x > -2/e$, negativo altrimenti. Quindi $f(x) > 0$ per $x > -2/e$, $f(x) < 0$ altrimenti.

La retta $x = e$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata, infatti

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} h(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} g(x) = +\infty,$$

inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ex}{x-e} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-e} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{1-e/x} = e,$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -g(x) = -e.$$

La derivata prima di $f(x)$ esiste per $x \neq e$ ed è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e(x-e)-ex-2}{(x-e)^2} = -\dfrac{2+e^2}{(x-e)^2} & \text{se } x > e \\ \dfrac{2+e^2}{(x-e)^2} & \text{se } x < e, \end{cases}$$

Si vede quindi chiaramente che $f'(x) > 0$ per $x < e$, mentre $f'(x) > 0$ per $x > e$, quindi la funzione è crescente per $x < e$ e decrescente per $x > e$. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(2+e^2)}{(x-e)^3} & \text{se } x > e \\ -\dfrac{2(2+e^2)}{(x-e)^3} & \text{se } x < e, \end{cases}$$

quindi, se $x > e$, $f''(x) > 0$. Lo stesso succede per $x < e$, infatti ora il numeratore è negativo, ma lo è anche il denominatore, quindi ancora $f''(x) > 0$. Riassumendo, dove esiste, la funzione è convessa. In figura 1 riportiamo il grafico di tale funzione.

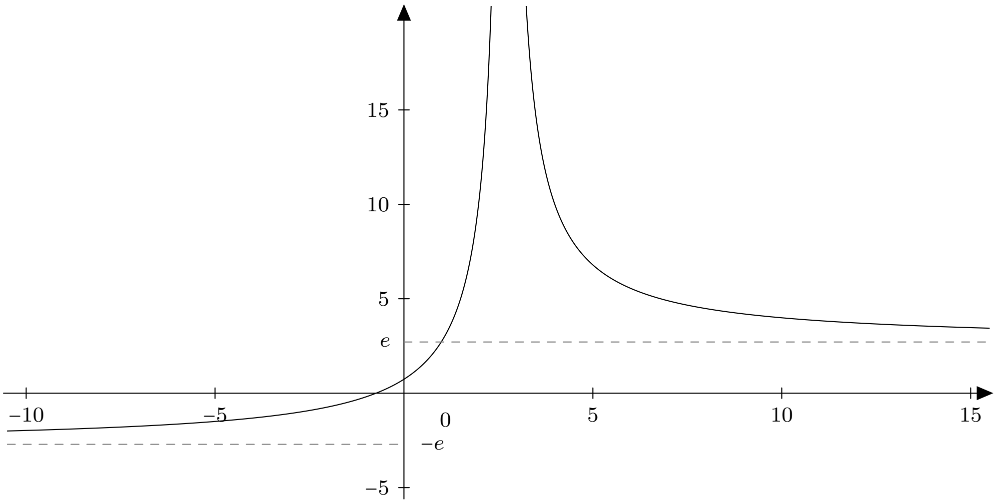

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = (ex+2)/|x-e|$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Tema: (5 punti)**
Si esponga quanto si sa circa i limiti di funzioni; in particolare si illustri qualche teorema che risulta utile nel calcolo dei limiti (per esempio teoremi del confronto o teorema di de l'Hospital, ecc...)

Limite finito all'infinito
In questo caso $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ si scrive nel dettaglio (ad esempio se $c = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, l'altro caso è analogo)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 : \forall x, x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ad esempio:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Ogni situazione di limite finito all'infinito corrisponde graficamente a un asintoto orizzontale.
Limite infinito all'infinito
In questo caso $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ si scrive nel dettaglio (ad esempio se $c = +\infty$ e $\ell = +\infty$, gli altri casi sono analoghi)

$$\forall H > 0 \ \exists K > 0 : \forall x, x > K \Rightarrow f(x) > H;$$

Ad esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \sin x + x^2 = +\infty.$$

Nei casi in cui una funzione presenta limite infinito all'infinito può accadere (ma non detto!) che $f(x)$ abbia ASINTOTO OBLIQUO, cioè esiste una retta $y = mx + q$ (con $m \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$) per $x \to +\infty$ (oppure $x \to -\infty$) tale che

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \quad \text{oppure rispettivamente} \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - q] = 0.$$

Si dimostra che $f(x)$ ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se esistono finiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q.$$

In tale caso l'asintoto è esattamente $y = mx + q$. Analogo criterio può essere enunciato nel caso $x \to -\infty$.
Esempio: la funzione $f(x) = e^x + 2x + 1$ ammette come asintoto obliquo per $x \to -\infty$ la retta $y = 2x + 1$.
Limite infinito al finito
In questo caso $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ si scrive nel dettaglio (ad esempio se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$, l'altro caso è analogo)

$$\forall K > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

Ad esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. In questi casi accade che f abbia un ASINTOTO VERTICALE. Ad esempio $x = 0$ asintoto verticale ad esempio per le funzioni $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$, $h(x) = \log x$.
Limite finito al finito
In questo caso $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ si scrive nel dettaglio

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \neq c, |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Esempio: $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. In tal caso, si può introdurre la nozione di continuità. Precisamente: sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo e sia $c \in I$. Allora si dice che f è CONTINUA in c se esiste

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Si dice che c un PUNTO DI DISCONTINUITÀ A SALTO per $f(x)$ quando i limiti destro e sinistro esistono finiti ma diversi tra loro. In questo caso si definisce

$$\text{salto in } c \ = \lim_{x\to c^+} f(x) - \lim_{x\to c^-} f(x).$$

Naturalmente in generale in ognuno dei 4 casi presentati, il limite può anche non esistere, anche nel caso di funzioni continue o limitate. Ad esempio $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.
Enunciamo ora alcuni risultati utili nel calcolo dei limiti. Useremo proprietà vere definitivamente per $x \to c$ e salvo avviso contrario considereremo $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$.
Teorema del confronto Se per $x \to c$, $f(x) \to \ell$, $g(x) \to \ell$ e si ha

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \to c$$

allora anche $h(x) \to \ell$ per $x \to c$.
In particolare, come corollario si ottiene che il prodotto di una successione limitata per una infinitesima è infinitesima.
Teorema di permanenza del segno - I e II forma Se per $x \to c$, $f(x) \to \ell > 0$ allora $f(x) > 0$ definitivamente per

$x \to c$.
Se per $x \to c$, $f(x) \to \ell$ e $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to c$ allora $\ell \geq 0$.
Cambio di variabile nel limite Siano f e g due funzioni per cui ben definita la funzione $f \circ g$, almeno definitivamente per $x \to x_0$ (con $x_0 \in \mathbb{R}^*$) e supponiamo che: (i) $g(x) \to t_0$ per $x \to x_0$
(ii) esiste $\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^*$
(iii) $g(x) \neq t_0$ definitivamente per $x \to x_0$
Allora esiste $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to t_0} f(t)$.
Concludiamo con una notevole applicazione del calcolo differenziale, costituita dal Teorema di De l'Hospital, che permette di dare una risposta a molti casi di limiti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ oppure $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
Teorema di de l'Hospital Siano f e g funzioni derivabili in un intervallo (a, b), con $g, g' \neq 0$ in (a, b). Se

$$(i) \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty$$
$$(ii) \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$$

allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure $x \to b^-$ e $b \leq +\infty$
Il Teorema di De l'Hospital, anche se usato correttamente, a volte pu complicare le situazioni anzich semplificarle. Per esempio il seguente caso (che si presenta in una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

mentre con un semplice cambio di variabile, ponendo $t = 1/x^2$ si riconduce il limite al caso della gerarchia degli infiniti

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$$

Il Teorema di De l'Hospital si usa per quozienti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, non per prodotti (a meno che non si presentino nella forma di indecisione $[0 \cdot \infty]$).
Il Teorema prescrive di calcolare il *quoziente delle derivate* NON *la derivata del quoziente!*
Se il limite del quoziente delle derivate non esiste il Teorema di De l'Hospital NON si applica e NULLA si può dire riguardo al limite di partenza, che pertanto può tranquillamente esistere. Quindi in particolare NON è lecito concludere che anche il limite di partenza non esiste. Ad esempio: il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma si vede immediatamente che

$$\frac{x - \sin x}{x + \sin x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

invece volendo utilizzare il Teorema di De l'Hospital si avrebbe che il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

non esiste.