V.C. RETTANGOLARE o UNIFORME

La v.c. continua RETTANGOLARE o UNIFORME descrive il modello probabilistico dell'*equiprobabilità*.

$$X \in [a,b]$$

con densità di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{1}{b-a}$$

con P(x) costante.

Sono soddisfatte le due condizioni affinchè *X* sia una v.c.; infatti:

1) La funzione di probabilità p(x) è non negativa: **p(x)≥0**;
2) $\int_a^b p(x)dx = 1$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

MODA(X): la distribuzione Uniforme è zeromodale.

$$Med(X) = \frac{a+b}{2}$$

V.C. NORMALE

La v.c. Normale X è una v.c. continua che assume valori nel campo dei numeri reali:

$$-\infty < X < +\infty$$

con *funzione di densità di probabilità* associata:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Dove $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ rappresentano i due parametri di definizione della v.c. Normale, con

$$-\infty < m < +\infty\,;\; 0 \leq \sigma < +\infty$$

La $P(x)$ ha un andamento campanulare e simmetrico, con asse di simmetria la retta $x=\boldsymbol{m}$.

La $P(x)$ ha come asintoto l'asse delle $\boldsymbol{x}$.

La $P(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, m)$ e decrescente nell'intervallo $(m, +\infty)$, ha due punti di flesso, in $x=\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\sigma}$ e in $x=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\sigma}$, ed è concava verso il basso nell'intervallo $(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{m}+\boldsymbol{\sigma})$ e convessa altrove.

Da tali proprietà della *densità di probabilità* della v.c. Normale segue che la *Moda* e la *Mediana* di $\boldsymbol{X}$ coincidono e sono pari a $\boldsymbol{m}$:

$$m = Moda(x) = Med(x)$$

- Media aritmetica della v.c. Normale: $M(x)=\boldsymbol{m}$

- Varianza della v.c. Normale: $Var(x)=\boldsymbol{\sigma}^2$

V.C. NORMALE STANDARDIZZATA

Sia ***X*** una v.c. Normale di media *m* e s.q.m. σ: $X \sim \mathrm{N}(\mathrm{m}, \sigma)$; sia ***U*** (o ***Z***, spesso si trova in letteratura) la corrispondente v.c. standardizzata, data da:

$$U = \frac{X - m}{\sigma}$$

Allora la v.c. ***U*** si distribuisce come una v.c. Normale di media *0* e s.q.m. *1*: $U \sim \mathrm{N}(0,1)$ e prende il nome di v.c. Normale Standardizzata:

$-\infty < U < +\infty$ con *funzione di densità di probabilità* associata:

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Vale la seguente identità: $F(x) = P(X < x) = P(Z < z = \frac{x - m}{\sigma})$

Per i calcoli si ricorre alle **TAVOLE** della v.c. Normale Standardizzata.

ESERCIZI RIGUARDANTI LA V.C. NORMALE

ESERCIZIO

Il 10° e l'80° percentile di una variabile casuale Normale X valgono rispettivamente $x_{10\%}$=187,2 e $x_{80\%}$=208,4.

a) Determinare Media e Varianza di X;

b) Indicare la densità di probabilità di X;

c) Trovare i *quartili*;

Calcolare:

d) P[(x<190)∩(x>204)]

e) P[(x<190)U(x>204)]

f) P(x>196)

SOLUZIONI

a) Si imposta il seguente sistema:

$$u_{10\%}=\frac{187{,}2-\mu}{\sigma}$$

$$u_{80\%}=\frac{208{,}4-\mu}{\sigma}$$

Sulle tavole di *u* si trovano i percentili della v.c. normale standardizzata:

$$-1{,}28=\frac{187{,}2-\mu}{\sigma}$$

$$+0{,}84=\frac{208{,}4-\mu}{\sigma}$$

Si ha quindi un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite μ e σ, facilmente risolvibile:

μ=200; σ=10.

b) La densità di probabilità di tale v.c.normale è la seguente:

$$P(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-200)^2}{2\bullet 10^2}} = 0{,}04e^{-\frac{(x-200)^2}{200}}$$

c) Il 1° Quartile coincide con il 25° percentile. Per determinare il 25° percentile della v.c.Normale in considerazione, si trova sulle tavole il 25° percentile della v.c.Normale Standardizzata e poi si utilizza la formula di standardizzazione:

$u_{25\%}$=-0,67=$\frac{Q_1 - 200}{10}$ da cui Q_1=193,3

Il 2° Quartile, ovvero 50° percentile, ovvero Mediana, trattandosi di una v.c.Normale, coincide con la media aritmetica:

Q_2=Med(x)=M(x)=200

Il 3° Quartile, ovvero 75° percentile, si determina in modo analogo a quanto fatto per il 1° Quartile:

$u_{75\%}$=+0,67=$\frac{Q_3 - 200}{10}$ da cui Q_3=206,7

Il 4° Quartile è il termine di una distribuzione che lascia prima di sé il 100% della distribuzione. Quindi, poiché la v.c. Normale è definita da +∞ a -∞, sarà:

$Q_4=x_{100\%}=+\infty$

d) P[(x<190)∩(x>204)]=0 essendo la probabilità di un evento *impossibile*: infatti è impossibile che la variabile X possa assumere valori inferiori a 190 e contemporaneamente valori maggiori di 204.

e) P[(x<190)U(x>204)]= P(x<190)+P(x>204)=

$=P(u < \frac{190-200}{10} = -1)+P(u > \frac{204-200}{10} = 0,4)=$

=(0,50-0,3413)+(0,50-0,1554)=0,5033

f) P(x>196)= $P(u > \frac{196-200}{10} = -0,4)$= 0,1554+0,5=0,6554

ESERCIZIO riguardante la <u>**trasformazione lineare**</u> di una v.c. normale

Un'azienda negozia un prodotto X che acquista a €12 il kg sostenendo costi fissi mensili per €1500. Sapendo che tale prodotto è poi rivenduto a €20 il kg e che la quantità X di prodotto mensilmente commercializzata è distribuita normalmente con media 250 kg e s.q.m. 25 kg,

a) Descrivere la funzione di Costo mensile C, la funzione di Ricavo mensile R e la funzione di Profitto mensile P (differenza fra ricavo e costo);

b) Indicare la distribuzione di probabilità con i rispettivi parametri della funzione di profitto P e rappresentarla graficamente;

c) Determinare la quantità minima mensile da vendere per non perdere e la probabilità di non raggiungere tale minimo;

d) Determinare l'intervallo entro cui si dovrebbe collocare, con *pratica certezza*, il profitto mensile.

SOLUZIONI

a) C = costi fissi + costi variabili = 1500+12X

   R=20X

   P=R-C= 20X-(1500+12X)= -1500+8X (: trasformazione lineare di X)

b) Essendo la v.c. ***P*** trasformazione lineare di ***X***, v.c. Normale di media M(x)=250 e σ(x)=25, allora ***P*** è una v.c. Normale di media M(P)=-1500+8*250=500 e V(P)=8^2*25^2=40000; da cui σ(P)=8*25=200.

c) la quantità minima mensile da vendere per non perdere si ha quando i ricavi uguagliano i costi:

   R = C quindi P=R-C=0:

   -1500+8X=0 da cui **x=187,5** kg

   P(x=187,5)=P($u < \dfrac{187{,}5-250}{25}$)=P(u<-2,5)=0,50-0,4938=0,0062

d) 99,74%=P(m-3σ<P< m+3σ)=P(500-3*200<P<500+3*200)=P(-100<p<1100)

ESERCIZIO riguardante la **somma** di v.c. Normali

Il peso X delle confezioni di caffè di una certa ditta si distribuisce normalmente con media m=200g. e σ=10g.

Per la distribuzione queste confezioni vengono imballate in colli di 100 pezzi ciascuno. Se indichiamo con Y il peso di ciascun collo e sappiamo che i pesi delle confezioni sono indipendenti fra loro, determinare:

a) Il peso medio e la varianza di ogni collo Y;

b) La distribuzione di probabilità di Y;

c) Il 99° percentile di X e il 5° percentile di Y;

d) P(Y<19,8kg); P(Y>21kg).

SOLUZIONI

a) Y è la somma di 100 v.c. Normali indipendenti X (m=200g; σ=10g), quindi Y si distribuisce normalmente con media M(Y)=100*200=20000g=20kg (la media della somma è uguale alla somma delle medie) e con V(Y)=100*10^2=10000 (la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze), da cui: σ(Y)=100g.

b) $P(Y) = \dfrac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-20000)^2}{2*10000}}$

c) $x_{99\%}$

$$u_{99\%} = \frac{x_{99\%} - m_x}{\sigma_x} = \frac{x_{99\%} - 200}{10} = +2,33$$

Da cui: $x_{99\%}$=200+2,33*10=233,3g.

$y_{5\%}$

$$u_{5\%} = \frac{y_{5\%} - m_y}{\sigma_y} = \frac{y_{5\%} - 20000}{100} = -1,64$$

Da cui: $y_{5\%}$=20000-1,64*100=19836g.

d) P(Y<19,8kg)= P(Y<19800g.)=

=P($u < \frac{19800 - 20000}{100} = -2$)= 0,50-0,4772=0,0228

P(Y>21kg)= P(Y>21000g.)=

=P($u > \frac{21000 - 20000}{100} = +10$)= 0,50-0,50=0

Utilizzo delle TAVOLE della **v.c. "*t* di Student"**

La v.c. ***t*** assume i valori nel campo reale:

$$t \in (-\infty, +\infty)$$

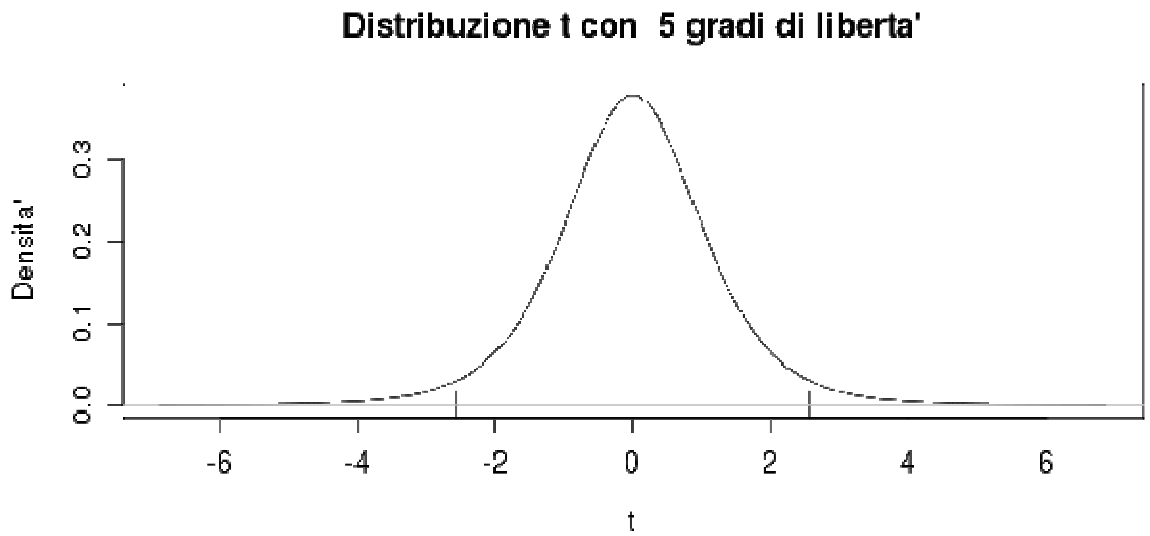
Con densità di probabilità P(***t***)=….Si tratta di una distribuzione campanulare e simmetrica centrata sullo *zero*.

L'unico parametro di definizione di ***t*** è *ν=n-1* (*ν* esprime i *Gradi di libertà*).

M(***t***)=0

$$V(t) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2}}$$



Quando *ν* è abbastanza elevato (*ν*→+∞, ovvero nella pratica quando *ν*>30) la v.c. ***t*** di Student converge alla v.c. Normale Standardizzata.

Utilizzo delle TAVOLE della **v.c. "chi-quadrato"**

$\chi^2 \in [0,+\infty)$

Con densità di probabilità P(χ^2)=….Si tratta di una distribuzione campanulare asimmetrica.

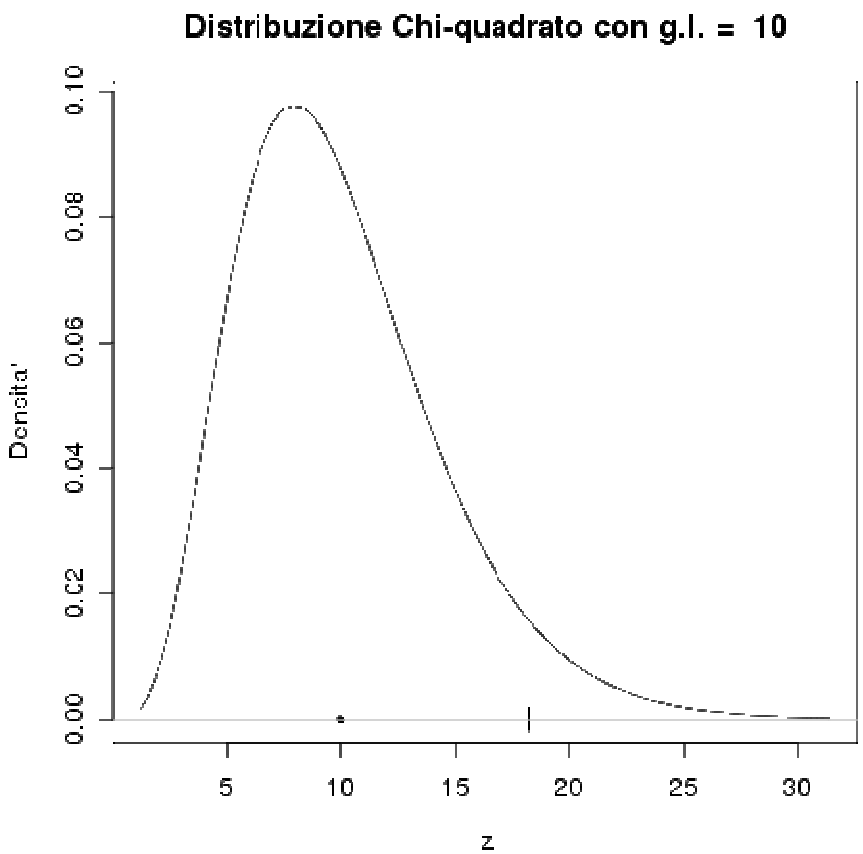
L'unico parametro di definizione di χ^2 è $v=n-1$ (v esprime i *Gradi di libertà*).

M(χ^2)=v

$V(\chi^2) = 2v$

$\sigma_{\chi^2} = \sqrt{2v}$

MODA=v-2



Quando v è abbastanza elevato ($v \to +\infty$, ovvero nella pratica quando v>100) la v.c. χ^2 converge alla v.c. Normale.