ESPERIMENTO CASUALE

↓

S

Spazio campionario : è l'insieme di **eventi** necessari e incompatibili che si presentano come **risultati** dell' ESPERIMENTO CASUALE.

↓

X

è l'insieme dei numeri reali associato ad S, in modo che ad ogni elemento (evento) di S corrisponda uno ed un solo numero reale.

↓

P(X)

è la funzione di probabilità secondo la quale ad ogni numero reale di X si assegna una misura di probabilità.

Definizione: dato un esperimento casuale che genera un sistema di eventi necessari e incompatibili (*Spazio campionario S*), si dice VARIABILE CASUALE (v.c.) una grandezza **X** che, per ogni evento dello *Spazio campionario S*, assume uno ed un solo numero reale secondo una funzione di probabilità **P(X)**.

I valori assunti da una v.c. X possono essere distribuiti in modo **discreto** o in modo **continuo**.

Se i valori di X sono distribuiti in modo **discreto** allora il numero di valori di X è NUMERABILE e a sua volta può essere finito o infinito.

Se i valori di X sono distribuiti in modo **continuo** allora il numero di valori di X è NON NUMERABILE e infinito.

Definizione di v.c. DISCRETA: una grandezza X che assume un numero finito o un'infinità numerabile di valori x_1, $x_{2,\dots,}$ x_n con probabilità associate rispettivamente $p(x_1)$, $p(x_2)$,…, $p(x_n)$ è detta v.c. DISCRETA se e solo se:

1) La funzione di probabilità P(X) è non negativa:

$p(x_i) \geq 0$ (per ogni i, con i=1,2,…,n)

Dove: $p(x_i) = P(X = x_i)$

2) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F(x)

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$

La F(x) gode delle seguenti proprietà:

a) $F(-\infty) = \underbrace{\lim}_{x \to -\infty} F(x) = 0$

b) $F(x_n) = 1$

$F(+\infty) = \underbrace{\lim}_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Da cui segue: $0 \leq F(x) \leq 1$

c) $P(x_{i-1} < X \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_i)$

La FUNZIONE DI RIPARTIZIONE è una funzione reale non decrescente definita su [0,1]. La sua rappresentazione grafica è una funzione "a gradini".

Definizione di v.c. CONTINUA: una grandezza **X** che assume tutti i valori nell'intervallo x_0-x_1 (con $x_0<x_1$) con funzione di probabilità associata **p(x)**, è detta v.c. CONTINUA se e solo se:

1) La funzione di probabilità p(x) è non negativa: **p(x)≥0;**

2) $\int_{x_0}^{x_1} p(x)dx = 1$

Nel continuo la p(x) è detta *funzione di* ***densità*** *di probabilità* o ***densità*** *di probabilità*.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F(x)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$ (se -∞≤x≤+∞)

La F(x) gode delle seguenti proprietà:

a) $F(-\infty) = \underbrace{\lim}_{x\to-\infty} F(x) = 0$

b) $F(+\infty) = \underbrace{\lim}_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Da cui segue: $0 \leq F(x) \leq 1$

c) $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} p(x)dx = F(b) - F(a)$

Per studiare le principali caratteristiche di una qualsiasi v.c. si possono utilizzare gli strumenti della Statistica Descrittiva per l'analisi delle distribuzioni (Indici di Localizzazione, di Variabilità e di Forma).

In particolare si ricordi la definizione di *momento*:

Data una variabile *X* diremo ***momento (di potenza) di ordine r dall'origine A*** la Media aritmetica delle erresime potenze degli scarti fra ogni valore assunto dalla variabile e la costante *A*. Analiticamente avremo:

$$_{A}\mu_r = M\left[(x-A)^r\right]$$

Formule di calcolo nel caso in cui X sia una v.c.:

Se X v.c. DISCRETA:

$$_{A}\mu_r = \sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^r\, p(x_i)$$

Se X v.c. CONTINUA:

$$_{A}\mu_r = \int (x-A)^r\, p(x)dx$$

ESERCIZIO

Una variabile discreta x assume i valori $x=1, 2, 3, 4$ con funzione associata $p(x)=ax$. Dopo aver determinato il valore del parametro a affinchè x sia una variabile casuale, calcolare Media aritmetica, Varianza, Moda, Mediana e 20° Percentile.

SOLUZIONI

Affinchè x sia una variabile casuale deve essere soddisfatta la condizione

$$\sum_x p(x) = 1$$

che in questo caso diventa:

$\sum_{x=1}^{4} ax = 1$ ovvero: 1*a+2*a+3*a+4*a=1 Da cui: 10a=1; **a**=1/10=**0,1**

Quindi ***p(x)=0,1x***

x	p(x)	x*p(x)	x^2*p(x)	P(x)
1	0,1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,4	0,8	0,3
3	0,3	0,9	2,7	0,6
4	0,4	1,6	6,4	1
	1	3	10	
			Var(x)=	1,00

M(x)= $\sum_{x=1}^{4} xp(x) = 3$

V(x)= M(x^2)-(M(X))^2=$\sum_{x=1}^{4} x^2 p(x)$ -3^2=10-9=1

MODA(x)=4 perché $x=4$ è il termine della distribuzione cui corrisponde la massima frequenza, ovvero probabilità ($p(x)=0,4$).

Med(x)=3 Infatti dalle probabilità cumulate ($P(x)=0,6$) si evince che per x=3 si ha il 50% della distribuzione.

$x_{20\%}$=2 Infatti dalle probabilità cumulate ($P(x)=0,3$) si evince che in corrispondenza al valore x=2 si ha il 20% della distribuzione.

ESERCIZIO

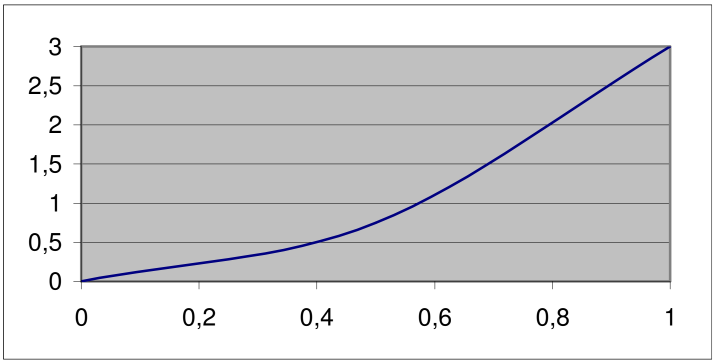
Una variabile continua X presenta la seguente funzione:

$p(x)=3x^2$ per $0 \le x \le 1$; $p(x)=0$ altrove

a) si verifichi se X è una variabile casuale;
b) si calcolino la Media e la Varianza di X;
c) si determinino la Mediana e la Moda.

SOLUZIONI

a) la I condizione affinchè una variabile sia una variabile casuale è soddisfatta; infatti la funzione p(x) è sempre non negativa per qualsiasi valore di x: $p(x) \ge 0$ per ogni valore di x.



La II condizione affinchè una variabile continua sia una variabile casuale continua è che l'integrale della p(x) calcolato nel *Campo di Esistenza* (*C.E.*) delle variabile sia unitario:

$$\int_{C.E.} p(x)dx = 1$$

Andiamo a verificare quest'ultima condizione:

$$\int_0^1 3x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1\text{-}0=1$$

Quindi si tratta di una variabile casuale continua.

b) $M(x)= \int_0^1 xp(x)dx = \int_0^1 x3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}(1\text{-}0)= \frac{3}{4} = 0{,}75$

$$Var(x)=M(x^2)\text{-}(M(X))^2= \int_0^1 x^2 p(x)dx \text{-}(0{,}75)^2 = \int_0^1 3x^4 dx \text{-}0{,}5625=3\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \text{-}0{,}5625=$$

$$=\frac{3}{5}\text{-}0{,}5625=0{,}0375$$

c) $\int_0^{Med(x)} p(x)dx = 0{,}50$

$$\int_0^{Med(x)} 3x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{Med(x)} = 0{,}50$$

$Med^3(x)-0=0{,}50$

$Med^3(x)=0{,}50$

$Med(x)=\sqrt[3]{0{,}50}=0{,}7937$

MODA(x)=1 (vedi grafico)

ESERCIZIO (v. Es.3 del *Tema d'esame del 26/01/09* di *Istituzioni di Stat.*)

Due giocatori A e B lanciano due dadi. Il giocatore A vince €14 se la somma del punteggio dei due dadi è minore di 6. A perde €14 in caso contrario.

a) Descrivere l'esito del gioco con una variabile casuale.
b) Qual è la probabilità che A non vinca?
c) Il gioco si può definire equo?
d) Quanto dovrebbe pagare A a B al fine di garantire che il gioco sia equo?
e) Quantificare in euro il rischio associato ad ogni partita.

SOLUZIONI

La somma del punteggio di due dadi è data da 36 valori, di cui 10 minori di 6, ovvero minori o uguali a 5, e gli altri 26 valori rimanenti maggiori o uguali a 6:

SOMMA	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Quindi la v.c. X che descrive l'esito del gioco sarà la seguente:

x	P(x)
14	0,2778
-14	0,7222

dove $P(x=+14)=10/36=0{,}2778$; $P(x=-14)=26/36=0{,}7222$

b) A non vince, ovvero perde, quando la somma del punteggio dei due dadi risulta essere maggiore o uguale a 6:

$P(Somma \geq 6)=1-P(S<6)=1-[P(S=2)+P(S=3)+P(S=4)+P(S=5)]=$

=1-[1/36+2/36+3/36+4/36]=1-10/36=1-0,2778=0,7222

c) Il gioco sarebbe equo se la M(x) fosse nulla. Ma qui M(x)= $\sum xp(x) =$-6,2222 quindi il gioco non è equo:

x	P(x)	xP(x)
14	0,2778	3,889
-14	0,7222	-10,111
		-6,222

d) Affinchè il gioco fosse equo A dovrebbe pagare a B la somma y che soddisfa il seguente vincolo:

M(x)=+14*(10/36)-**y***(26/36)=**0**

y=5,3846 €

e) il *rischio* associato ad ogni partita è dato dallo *Scarto quadratico medio* della v.c. x:

x	P(x)	xP(x)	x^2P(x)
14	0,2778	3,889	54,4488
-14	0,7222	-10,111	141,551
		-6,222	196

Var(x)=M(x^2)-(M(x))^2=196-(-6,2222)^2=157,284

s.q.m.(x)=√V(x)=12,54€