COGNOME [ ] NOME [ ] Matr. [ ]

Firma dello studente ____________________

A

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 21.09.2012

Tempo: 3 ore.

Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:**

Per quali valori del parametro $\alpha > 0$ si ha che il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)(e^{3x}-1)}{5x^\alpha}$$

è finito?

(A) $\alpha = 6/5$ (B) $\alpha \le 2$ (C) $\alpha \ge 2$ (D) $\alpha \le 6/5$

✎ **Test 2:**

Quanti sono i punti di intersezione dei grafici $f(x) = \log(3x) - 4$ e $g(x) = -|x-2|$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

✎ **Test 3:**

Sia $f(w) = 2w + \log w$. Allora la retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ in $(2, f^{-1}(2))$ è data da:

(A) $y = x + 1$ (B) $y = x - 1$ (C) $y = (x-2)/3$ (D) $y = (x+1)/3$

✎ **Test 4:**

L'insieme dei numeri complessi z tali che

$$|z+1-i| > |z| \text{ e } |z-i| < 1$$

è:

(A) un semipiano (B) una semiretta (C) un semicerchio (D) una semicirconferenza

✎ **Test 5:**

Sia $f(x) = \cos(3x)$ e $g(y) = e^{y-1}$. Allora il polinomio di Taylor di secondo grado centrato in $x_0 = 0$ della funzione $(g \circ f)(x)$ è

(A) $1 + 2x^2$ (B) $2x + 2x^2$ (C) $1 - \frac{9}{2}x^2$ (D) $2x - 2x^2$

✎ **Test 6:**

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_1^{x/3} e^{t^2}\,dt.$$

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{3e}$ (C) $\frac{e}{3}$ (D) e

TEST 1 Dagli sviluppi in serie di Taylor si ha per $x \to 0^+$

$\sin 2x \sim 2x \qquad e^{3x}-1 \sim 3x$

per cui $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)(e^{3x}-1)}{5x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot 3x}{5x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6}{5}\, x^{2-\alpha}$$

Se $\alpha < 2 \Rightarrow$ il limite fa 0. Se $\alpha = 2$ il limite fa $\frac{6}{5}$. Se $\alpha > 2$ il limite fa $+\infty$. La risposta corretta è dunque la (B)

TEST 2 Facciamo un breve studio della funzione $h(x) = f(x) - g(x)$ $= \log(3x) - 4 + |x-2|$ che è definita per $x > 0$.

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty.$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha $h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{se } x > 2 \\ h_2(x) & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$

dove $h_1(x) = \log(3x) - 4 + (x-2)$

$h_2(x) = \log(3x) - 4 - x + 2.$ Si vede rapidamente che

$h_1'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ se $x > 2$

$h_2'(x) = \frac{1-x}{x}$ che è positiva se $0 < x < 1$ e negativa altrove.

Quindi $h(x)$ ha un massimo locale in $x = 1$ e un minimo locale in $x = 2$.

Osservando che $h(1) = \log 3 - 3 < 0$

$h(2) = \log 6 - 4 < 0$ (perché minimo locale e $h(2) < h(1)$)

allora essendo poi $h(x)$ crescente per $x > 2$ si ha che $h(x)$ ha un unico zero. La risposta corretta pertanto è la (B)

TEST 3 Si osserva che $f(w) = 2$ se $w = 1$ quindi $f(1) = 2$ e $f^{-1}(2) = 1$

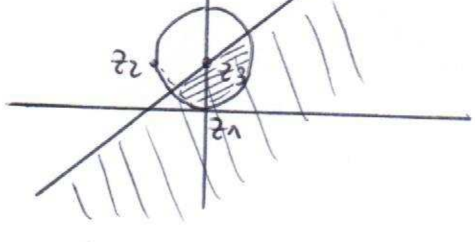
Allora dalla formula di derivazione della funzione inversa si ha che $g'(2) = \frac{1}{f'(1)}$ ma $f'(w) = 2 + \frac{1}{w}$ e allora $f'(1) = 3$ da cui $g'(2) = \frac{1}{3}$.

L'equazione della retta è allora $y = 1 + \frac{1}{3}(x-2) = \frac{1}{3}(x+1)$.

La risposta corretta è la (D)

TEST 4 L'insieme $|z+1-i| = |z|$ rappresenta l'asse del segmento che congiunge i punti $z_1 = 0$ e $z_2 = i-1$ (rappresenta i punti equidistanti da z_1 e z_2). Pertanto l'insieme $|z+1-i| > |z|$ rappresenta il semipiano (individuato dall'asse di cui sopra) contenente z_1.

Invece l'insieme $|z-i| < 1$ rappresenta il cerchio (pieno) di centro $z_3 = i$ e raggio 1.



L'intersezione tra i 2 insiemi è un semicerchio; la risposta corretta è pertanto la (C)

TEST 5 Calcoliamo prima di tutto la funzione composta.

Si ha $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{\cos(3x)-1}$

infatti $\quad x \xrightarrow[f]{} \cos(3x) \xrightarrow[g]{} e^{\cos(3x)-1}$

A questo punto allora, dagli sviluppi di Taylor (tralasciando l'errore)

per $x \to 0$
$$e^{\cos(3x)-1} \sim 1 + \cos(3x) - 1$$
$$\sim 1 - \frac{9x^2}{2}.$$
La risposta corretta è pertanto la (C)

TEST 6 Dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, usando il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \int_1^{x/3} e^{t^2}\,dt = \lim_{x \to 3} \frac{F(\frac{x}{3})}{x-3}$$ con $F(x) = \int_1^x e^{t^2}\,dt$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 3} \frac{F'(\frac{x}{3}) \cdot \frac{1}{3}}{1} = \lim_{x \to 3} e^{(\frac{x}{3})^2} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} e^{\frac{x^2}{9}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{e}{3}.$$ La risposta corretta pertanto è la (C)

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 21.09.2012

Esercizio (3 punti)

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}}$$

Si tratta di una serie di termini con segno alternato. Poniamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}}$ e tentiamo di usare il criterio di Leibniz (Il fatto di avere $(-1)^{n+1}$ anziché $(-1)^n$ non influisce ai fini della convergenza della serie).

Si vede immediatamente che $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e inoltre $\sqrt{n}$ è crescente, $2\sqrt[5]{n}$ è crescente, la somma delle due è una funzione crescente e pertanto a_n è decrescente. Sono quindi verificate le ipotesi del criterio di Leibniz pertanto la serie data converge.

Esercizio (5 punti)

Determinare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2 + 3x^3}\, dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

Si tratta di un integrale improprio (con problema in 0) e funzione integranda non negativa. Quindi l'idea è quella di usare il teorema 8.9.10 a pagina 196 delle dispense cercando di confrontare l'integrale dato con uno più semplice, per esempio $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx$ che è integrale improprio se $\beta > 0$ e converge per $\beta < 1$.

Quindi per $x \to 0^+$ $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ $x^2 + 3x^3 \sim x^2$. Si ha pertanto

$$\frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2+3x^3} \sim \frac{x^\alpha \cdot x^{1/2}}{x^2} = x^{\alpha - 3/2} = \frac{1}{x^{3/2-\alpha}}.$$

Pertanto dal teorema citato, l'integrale dato si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2-\alpha}} dx$ che converge ed è integrale improprio se

$$0 < \frac{3}{2} - \alpha < 1 \iff \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$$

Analisi Matematica 2 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 21.09.2012

Esercizio (8 punti)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|\ln^2 x - 1|}{x}$$

e rappresentare il grafico. Non è richiesta l'analisi della derivata seconda.

Dominio: $x>0$ (esistenza logaritmo) in cui è incluso $x \neq 0$ (esistenza frazione). In tal caso $f(x)>0 \quad \forall x \in D$

Si osserva che $\ln^2 x - 1 > 0 \iff \ln x < -1 \vee \ln x > 1 \iff x < \frac{1}{e} \vee x > e$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln^2 x - 1}{x} =: g(x) & 0<x<\frac{1}{e} \vee x>e \\ \dfrac{1-\ln^2 x}{x} =: h(x) & \text{se } \frac{1}{e}<x<e. \end{cases}$$

$f(x)=0 \iff x=\frac{1}{e} \vee x=e$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \text{ dalla gerarchia degli infiniti.}$$

Inoltre

$$g'(x) = \frac{\left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)x - \ln^2 x + 1}{x^2} = \frac{-\ln^2 x + 2\ln x + 1}{x^2}$$

$0<x<\frac{1}{e} \vee x>e$

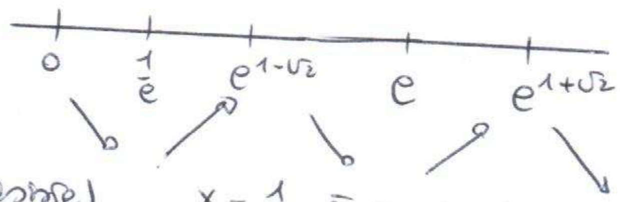
Risolviamo l'equazione $z^2 - 2z - 1 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 1+1 = 2 \qquad z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Quindi $g'(x)=0 \iff \ln x = 1 \pm \sqrt{2} \iff x = e^{1\pm\sqrt{2}}$

$g'(x)>0 \iff e^{1-\sqrt{2}} < x < e^{1+\sqrt{2}}$

Tenendo conto che il segno di h è l'opposto di quello di g si può riassumere il segno della derivata (dove esiste) e la crescenza di f.



$x=\frac{1}{e}$ è punto di minimo locale

$x=e$ è punto di minimo locale

$x=e^{1\pm\sqrt{2}}$ sono punti di massimo locale

Si evidenziano 2 punti angolosi

Il grafico qualitativo è

$x=\frac{1}{e}$, $x=e$ punti angolosi