

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

14 Febbraio 2020

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	20	
problema 2	10	
totale	30	

1. Si considerino i due seguenti automi definiti sull'alfabeto $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

Automa G (impianto):

- stati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
- transizione da 0 a 1: a_1 ,
transizione da 0 a 3: a_2 ,
transizione da 1 a 2: b_1 ,
transizione da 1 a 4: a_2 ,
transizione da 2 a 5: a_2 ,
transizione da 3 a 4: a_1 ,
transizione da 3 a 6: b_2 ,
transizione da 4 a 5: b_1 ,
transizione da 4 a 7: b_2 ,
transizione da 5 a 8: b_2 ,
transizione da 6 a 7: a_1 ,
transizione da 7 a 8: b_1 .

Automa H_a (specifica):

- stati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
- transizione da 0 a 1: a_1 ,
transizione da 0 a 3: a_2 ,
transizione da 1 a 2: b_1 ,
transizione da 1 a 9: a_2 ,
transizione da 2 a 5: a_2 ,
transizione da 3 a 4: a_1 ,
transizione da 3 a 6: b_2 ,
transizione da 4 a 7: b_2 ,
transizione da 5 a 8: b_2 ,
transizione da 6 a 7: a_1 ,
transizione da 7 a 8: b_1 ,
transizione da 9 a 5: b_1 .

(a) Si disegnino i grafi dei due automi.

(b) Dati i linguaggi K e $M = \overline{M}$ sull'alfabeto E . Sia $E_{uc} \subseteq E$.

Si scriva la definizione di controllabilit  di K rispetto a M e E_{uc} .

Traccia di soluzione.

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K   controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K},$$

che   equivalente a

$$\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}.$$

(c) Si definisca il sovralinguaggio controllabile minimo chiuso al prefisso $K^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

Sia $\mathcal{CC}_{out}(K)$ la collezione dei sovralinguaggi di K chiusi rispetto al prefisso e controllabili, allora si definisce

$$K^{\downarrow C} = \bigcap_{L \in \mathcal{CC}_{out}(K)} L.$$

(d) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$. Siano $E_c = \{a_1, b_1\}$, $E_o = E$.

Si consideri la formula chiusa

$$K^{\downarrow C} = \overline{K} E_{uc}^* \cap M.$$

Per $K = \mathcal{L}_m(H_a)$, si calcoli $K^{\downarrow C}$.

Si esegua il calcolo mostrando tutti i passaggi della costruzione indicata dalla formula chiusa:

- i. automi di \overline{K} e di E_{uc}^* ;
- ii. automa non-deterministico della loro concatenazione;
- iii. automa deterministico della loro concatenazione;
- iv. automa del prodotto con M .

Si scriva l'espressione del linguaggio risultante

Si richiede di svolgere e mostrare tutti i passaggi accuratamente; in particolare, si applichi la costruzione della ϵ -chiusura (per determinare l'automa non-deterministico) letteralmente, annotando gli stati con i sottoinsiemi di stati dell'automa da determinare.

Si noti che in questa costruzione si considerano solo i linguaggi generati degli automi coinvolti, per cui non serve indicare gli stati marcati.

Traccia di soluzione.

Si vedano i grafici allegati dei vari passi della costruzione.

Il risultato finale e' $K^{\downarrow C} = \overline{K} \cup \{a_1 a_2 b_2\}$.

- (e) Nel caso del punto precedente sarebbe stato possibile ottenere $K^{\downarrow C}$ con un semplice ragionamento a partire dal problema specifico ? Si scriva tale argomento.

Traccia di soluzione.

Si tratta di individuare il minimo ampliamento di \overline{K} per renderlo controllabile: questo si ottiene estendendo la stringa a_1a_2 con l'evento incontrollabile b_2 (ottenendo così la stringa $a_1a_2b_2$). Non ci sono altre estensioni di stringhe di \overline{K} con eventi incontrollabili. Da cui $K^{\downarrow C} = \overline{K} \cup \{a_1a_2b_2\}$.

- (f) Dati i linguaggi K e $M = \overline{M}$ sull'alfabeto E . Siano $E_c \subseteq E$ e $E_o \subseteq E$. Sia P la proiezione naturale da E^* a E_o^* .

Si scriva la definizione di osservabilita' di K rispetto a M , E_c ed E_o .

Traccia di soluzione.

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E . Sia $E_c \subseteq E$ l'insieme degli eventi controllabili. Sia $E_o \subseteq E$ l'insieme degli eventi osservabili con P la proiezione da E^* a E_o^* .

Si dice che K e' osservabile rispetto a M , P , E_c , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$,

$$s\sigma \notin \overline{K} \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \emptyset.$$

- (g) Siano $M = \mathcal{L}(G)$ e $K = \mathcal{L}_m(H_a)$.

Siano $E_{uo} = \{a_2\}$ e $E_{uc} = \emptyset$.

K e' osservabile rispetto a M , E_c ed E_o ? Lo si verifichi usando la definizione.

Traccia di soluzione.

Si consideri la stringa $s = a_2a_1$ e $\sigma = b_1$, allora si ha che $a_2a_1b_1 \notin \overline{K}$, ma $a_2a_1b_1 \in M$; inoltre $P(s) = a_1$, $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\}$, percio' $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\} \cap \overline{K} = \{a_1a_2b_1\} \neq \emptyset$ il che falsifica la condizione di osservabilita'.

Intuitivamente, dopo aver visto a_2a_1 il controllore dovrebbe disabilitare b_1 e abilitare b_2 , mentre dopo aver visto a_1a_2 il controllore dovrebbe abilitare b_1 e disabilitare b_2 , ma per l'inosservabilita' di a_2 il controllore non e' in grado di distinguere a_2a_1 da a_1a_2 (vede la loro proiezione comune come a_1), e quindi non sa che azione intraprendere dopo aver visto a_1 .

- (h) Si enunci il teorema di controllabilita' e osservabilita' sull'esistenza di un supervisore non-bloccante in presenza di controllabilita' e osservabilita' limitata.

Traccia di soluzione.

Sia dato il sistema a eventi discreti $G = (X, E, f, \Gamma, x_o, X_m)$, dove $E_{uc} \subseteq E$ sono gli eventi incontrollabili e $E_{uo} \subseteq E$ sono gli eventi inosservabili (per cui $E_c = E \setminus E_{uc}$ e $E_o = E \setminus E_{uo}$). Si consideri la proiezione P da E^* a E_o^* , e il linguaggio $K \subseteq \mathcal{L}_m(G)$, where $K \neq \emptyset$. Esiste un P -supervisore non-bloccante S_P per G tale che

$$\mathcal{L}_m(S_P/G) = K, \quad \mathcal{L}(S_P/G) = \overline{K}$$

se e solo se le tre condizioni seguenti valgono:

- i. K e' controllabile rispetto a $\mathcal{L}(G)$ e E_{uc} .
- ii. K e' osservabile rispetto a $\mathcal{L}(G)$, E_o e E_c .
- iii. K e' $\mathcal{L}_m(G)$ -chiuso ($K = \overline{K} \cap \mathcal{L}_m(G)$).

- (i) Nel caso precedente (punto (g)), esiste tale supervisore ?

Traccia di soluzione.

No, perche' non e' soddisfatta la condizione di osservabilita'.

2. Si consideri il seguente grafo delle transizioni dei segnali (STG, Signal Transition Graph, nella letteratura in inglese):

- $V = \{v_1(a+), v_2(b+), v_3(c+), v_4(a-), v_5(b-), v_6(c-)\}$, insieme dei vertici, dove accanto a ogni vertice e' indicata tra parentesi la transizione di segnale corrispondente;
- $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_2)\}$, insieme degli archi;
- gli archi (v_6, v_1) e (v_6, v_2) hanno ciascuno un gettone.

(a) Si spieghi che cos'e' un grafo delle transizioni dei segnali e la sua interpretazione come rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Un GTS - grafo di transizione dei segnali (STG - signal transition graph, in inglese) e' un modello formale per diagrammi temporali (che riportano le relazioni di causalita' tra i cambiamenti di livello di forme d'onda). Piu' formalmente, e' una rete di Petri interpretata dove le transizioni sono rappresentate direttamente dalle loro etichette (transizioni di segnali), e si omettono i posti (tutti i posti hanno una sola transizione in ingresso e una sola transizione in uscita - Grafo Marcato, MG - Marked Graph). I gettoni indicano lo stato iniziale del sistema.

(b) Si disegni il grafo delle transizioni dei segnali e la rete di Petri corrispondente.

Traccia di soluzione.

Si puo' rappresentare un grafo di transizione dei segnali (disegnando le transizioni come sbarrette e i posti come cerchietti), o nella sua forma semplificata (le transizioni sono rappresentate direttamente dalle etichette e si omettono i posti dato che hanno un'unica transizione in ingresso e in uscita). Qui si chiede di disegnare entrambe le rappresentazioni.

Vedi foglio allegato.

(c) Si disegni il grafo di raggiungibilit  di tale rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Il grafo di raggiungibilit  GR (RG - reachability graph) di una rete di Petri   un sistema di transizione ST (TS - transition system) i cui stati sono gli stati raggiungibili della rete e gli eventi sono le transizioni della rete.

Vedi foglio allegato.

- (d) Codificando il grafo di raggiungibilit  si ottenga il grafo degli stati, e lo si disegni.

Traccia di soluzione.

Si puo' dire che il grafo degli stati GS (SG - state graph) e' l'interpretazione binaria del sistema di transizione che rappresenta il grafo di raggiungibilit . Ogni nodo e' etichettato con un vettore binario che riporta il valore binario di ogni segnale, e gli eventi rappresentano transizioni di segnali.

Vedi foglio allegato.

- (e) Si enuncino le proprieta' di codifica unica e di codifica completa. Si verifichi se il grafo ottenuto le soddisfa.

Traccia di soluzione.

Codifica Consistente: per ogni transizione tra due stati del grafo degli stati, i due vettori binari degli stati differiscono solo per il cambio di valore del segnale che etichetta la transizione.

Codifica Unica: a ogni stato del grafo degli stati e' assegnato un codice binario unico.

E' sufficiente per derivare senza ambiguit  le funzioni di stato futuro. Non e' una condizione necessaria perche' alcuni stati nel grafo degli stati possono essere equivalenti, oppure l'ambiguit  puo' riguardare i segnali d'ingresso (che non devono essere sintetizzati, ma e' compito dell'ambiente produrre correttamente).

Codifica Completa: se due stati del grafo degli stati hanno lo stesso codice binario, essi hanno gli stessi segnali d'uscita abilitati.

Intuitivamente, la codifica completa indica che il sistema ha abbastanza memoria per ricordarsi in che stato e' (e quindi che le funzioni di stato futuro sono deterministiche e percio' realizzabili). In particolare, se la codifica e' unica, essa e' completa.

Le proprieta' precedenti servono per garantire la realizzabilit  di un circuito (assumendo ovviamente anche la proprieta' della limitatezza).

Limitatezza: il grafo degli stati ha un numero finito di stati, cioe' la rete di Petri originale ha un insieme di raggiungibilit  finito.

Il grafo ottenuto soddisfa la proprieta' di Codifica Unica (e quindi di Codifica Completa).

- (f) Si sintetizzi il segnale di uscita c in funzione dei segnali d'ingresso a e b , minimizzandone la funzione logica. Se ne mostri la realizzazione con porte logiche.

Si commenti il circuito ottenuto.

Traccia di soluzione.

Calcolando le regioni di eccitazione $ER(c+)$, $ER(c-)$ (c cambia di livello) e di quiescenza $QR(c+)$, $QR(c-)$ (c non cambia di livello) del segnale c , si determina la funzione di stato futuro e la si minimizza (ad esempio con una mappa di Karnaugh).

$$ER(c+) = \{110\}, ER(c-) = \{001\}, QR(c+) = \{111, 011, 101\}, \\ QR(c-) = \{000, 100, 010\}.$$

Il circuito ottenuto realizza l'elemento C, una primitiva fondamentale nella sintesi di circuiti asincroni proposta da Muller nel 1959. Se entrambi gl'ingressi vanno su, dopo anche l'uscita va su; l'uscita va giu' dopo che entrambi gl'ingressi sono andati giu'.

Vedi foglio allegato.

Nota finale.

Una realizzazione corretta delle uscite richiede che si abbiano transizioni sulle uscite se e solo se l'ambiente ne e' in attesa; transizioni non attese, o il non generare transizioni attese possono produrre malfunzionamenti.

Per garantire che il circuito sia indipendente dalla velocita' (speed independent), cioe' che la sua correttezza non dipenda dai ritardi effettivi delle componenti, s'impone la condizione di persistenza delle uscite: se c'e' una coppia di segnali di cui l'uno disabilita l'altro, entrambi devono essere segnali d'ingresso.

Vale il teorema: *Un grafo di transizione dei segnali (GTS, STG) e' realizzabile come un circuito indipendente dalle velocita' se e solo se il grafo degli stati (GS, SG) e' finito, consistente, persistente rispetto alle uscite e soddisfa la proprieta' di codifica completa.*

Inoltre per garantire che il circuito sintetizzato sia indipendente dalla velocita' l'ipotesi di porte complesse atomiche richiede che tutti i ritardi interni ad ogni porta siano trascurabili e non producano alcun comportamento spurio osservabile esternamente. Le porte complesse sono astrazioni di realizzazioni fisiche e dipendono dalle tecnologie disponibili. A volte si allude a questo fatto disegnando le porte logiche come tutte "ap-

picccate” senza fili interni, per significare che si vorrebbe una realizzazione a porte complesse senza ritardi interni. Tale problematica esula dal nostro corso.