

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

4 Febbraio 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{48} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_4)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$, tranne che $w(p_2, t_2) = 2$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [3, 1, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{48} .

- (b) Una condizione necessaria affinché uno stato x sia raggiungibile da uno stato iniziale x_0 è che ci sia una soluzione z con interi non-negativi dell'equazione

$$x = x_0 + zA$$

dove A è la matrice d'incidenza della rete di Petri.

- Dato $x = [0, 0, 1, 2]$, si risolva il sistema ottenendo z . E' verificata la condizione necessaria ?

Traccia di soluzione.

Gli elementi della matrice A sono definiti come

$$a_{j,i} = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} 3 - z_1 &= 0 \\ 1 + z_1 - 2z_2 &= 0 \\ z_1 - z_2 &= 1 \\ z_2 &= 2 \end{aligned}$$

La soluzione è $z = [3, 2]$, perciò la condizione necessaria è verificata.

- Qual è l'interpretazione del vettore z ? Dopo aver trovato il vettore z , stabilite se x è raggiungibile da x_0 .

Traccia di soluzione.

La componente i -esima del vettore z denota il numero di volte che la transizione t_i deve scattare per passare dallo stato x_0 allo stato x .

Si può raggiungere x a partire da x_0 . Ad esempio prima si può fare scattare t_1 tre volte e poi t_2 due volte.

- (c) La precedente condizione necessaria e' anche sufficiente per una rete di Petri generica ? Argomentate la vostra risposta (ad esempio con un controesempio alla sufficienza).

Traccia di soluzione.

No. Un controesempio segue. Si consideri la rete di Petri P_{1c} definita da:

- $P = \{p_1, p_2\}$
- $T = \{t_1\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_1), (t_1, p_2)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [0, 0]$ la marcatura iniziale e $x_0 = [0, 1]$ la marcatura finale.

La matrice d'incidenza e'

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema si riduce a

$$0 = 0$$

$$z = 1$$

La soluzione e' $z = [1]$, percio' la condizione necessaria e' verificata. Ma non e' sufficiente, perche' la transizione t_1 non e' mai abilitata, dato che manca un gettone in p_1 (e' come se l'algebra delle matrici ignorasse che non si puo' consumare un gettone prima di averlo prodotto).

- (d) Un vostro compagno congettura che se una rete di Petri e' aciclica (cioe', senza cicli di archi diretti) allora la condizione e' anche sufficiente. Ha torto o ragione ? Se ha torto potete mostrare un controesempio ? Se ha ragione potete abbozzare un ragionamento che lo dimostri ?

Traccia di soluzione.

Il vostro compagno ha ragione.

Sia N_z la sottorete della rete di Petri aciclica costituita dalle transizioni t_i tali che $z_i > 0$ e dai loro posti d'ingresso e uscita insieme con i loro archi di connessione. Sia x_{0z} il sottovettore di x_0 ristretto ai posti in N_z . La sottorete (N_z, x_{0z}) e' aciclica. Si puo' dimostrare che in tale sottorete aciclica deve esserci almeno una transizione t_i che puo' scattare a partire da x_{0z} . Si faccia scattare t_i e si ottenga la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, $z' = z - u$, dove u ha tutte le componenti nulle tranne $u_i = 1$. Allora $x = x' + z'A$, $z' \geq 0$, e la sottorete $(N_{z'}, x'_{z'})$ e' aciclica. Si ripeta il procedimento finche z' si riduce al vettore nullo.

Si noti che la rete di Petri proposta in questo esercizio e' aciclica.

2. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^*ba^*}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare a^*ba^*), $L_m(G) = a^*ba^*$.

Si supponga che la specifica definita dal linguaggio marcato desiderato sia $K = \{a^kba^l, k \geq l \geq 0\} \subseteq L_m(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato riconosca solo quelle stringhe in cui il numero di a che precedono b non e' minore del numero di a che seguono b .

- (a) Il linguaggio K e' controllabile? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile.

Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$. Si consideri una stringa $s \in \overline{K}$,

- se $s = a^*$ e quindi $s\sigma = sb = a^*b \in L(G)$ allora $s\sigma = sb \in \overline{K}$, altrimenti
- se $s \neq a^*$ allora $s\sigma = sb \notin L(G)$ (cioe', quando s ha la forma $s = a^kba^l$ ($k \geq l$), allora $sb = a^kba^lb \notin L(G)$, poiche' le parole in $L(G)$ non possono contenere un secondo evento b dopo il primo).

Percio' non esiste una stringa $s \in \overline{K}$ tale che $s\sigma = sb \in L(G) \setminus \overline{K}$, cioe' K e' controllabile.

Osservazione Si noti che vale $\overline{K} = \overline{\{a^kba^l, k \geq l \geq 0\}} = \overline{\{a^kba^k, k \geq 0\}}$. Se si fosse gia' dimostrata la controllabilita' per $K_1 = \{a^kba^k, k \geq 0\}$ o $K_2 = \{a^kba^k, k \geq 0\}$, allora sarebbe stata automaticamente dimostrata la controllabilita' di $K = \{a^kba^l, k \geq l \geq 0\}$.

- (b) Si enunci il teorema di esistenza di un supervisore non-bloccante sotto controllabilita' limitata. Esiste un supervisore non-bloccante S tale che l'impianto controllato riconosca il linguaggio marcato K ? Si descriva tale supervisore S se esiste, e la sua strategia di controllo.

Traccia di soluzione

Definizione Siano $G = (X, E, f, \gamma, x_0)$ un impianto, $E_{uc} \subseteq E$ gli eventi incontrollabili, $K \subseteq L_m(G)$, $K \neq \emptyset$ la specifica. Esiste un supervisore non-bloccante S per G tale che $L_m(S/G) = K$ e $L(S/G) = \overline{K}$ se e solo se

$$\begin{aligned}\overline{K}E_{uc} \cap L(G) &\subseteq \overline{K}, \\ K &= \overline{K} \cap L_m(G).\end{aligned}$$

Il supervisore non-bloccante costruito nella dimostrazione del caso NCT (teorema di controllabilita' non-bloccante) e' lo stesso che nel caso CT (teorema di controllabilita'). L'unica differenza e' che bisogna verificare la seconda condizione precedente.

Abbiamo gia' mostrato che la condizione di controllabilita' e' verificata. Verifichiamo la seconda condizione per l'esistenza di un supervisore non-bloccante. Si consideri $s \in \overline{K}$: se $s = a^*$, allora $s \notin L_m(G)$; se $s \neq a^*$, allora $s \in K$. Percio' non esiste una stringa $s \in \overline{K}$ tale che $s \in L_m(G) \setminus K$.

Percio' ogni supervisore S con $L_m(S) = L(S) = \overline{K}$ e' un supervisore non-bloccante tale che K e' il linguaggio marcato dell'impianto controllato. Tale supervisore disabilita l'evento a dopo ogni stringa del tipo $a^k b a^k$. Vale sempre l'osservazione che non c'e' una realizzazione a stati finiti di tale supervisore.

Osservazione Si noti la differenza di conclusione nel caso in cui fosse $K = \{a^k b a^k, k \geq 0\} \subseteq L_m(G)$. In tal caso non esiste un supervisore non-bloccante perche' la seconda condizione non e' soddisfatta; per esempio la stringa

$$ab \in \overline{K} \cap L_m(G) \setminus K,$$

cioe' $K \not\supseteq \overline{K} \cap L_m(G)$ e cosi' $K \neq \overline{K} \cap L_m(G)$ (si ha sempre che $K \subseteq \overline{K} \cap L_m(G)$, poiche' $K \subseteq \overline{K}$ e $K \subseteq L_m(G)$).

Spiegazione intuitiva: perche' la stringa ab costituisce un controesempio per $K = \{a^k b a^k, k \geq 0\}$ e non per il K della domanda di questo

esame ? La risposta e' che un supervisore non-bloccante deve garantire $L_m(S/G) = K$. Nel caso negativo $K = \{a^k b a^k, k \geq 0\}$, si ha $ab \in L_m(G)$, $ab \in S$, quindi $ab \in L_m(S/G)$, ma $ab \notin K$, cioe' il linguaggio marcato dell'impianto controllato conterrebbe almeno una stringa (cioe' ab) che non e' parte del linguaggio marcato che costituisce la specifica. Invece per il K di questo tema d'esame, $ab \in K$ e quindi tale stringa marcata dell'impianto controllato e' anche una stringa marcata della specifica.

3. Si consideri il seguente automa ibrido di un termostato con una variabile di stato $x(t)$ (e un'uscita $y(t) \equiv x(t)$):

- locazioni: l_1, l_2 , dove sia l_1 che l_2 possono essere locazioni iniziali, in entrambi i casi con condizione iniziale $x(0) := 20$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{x}(t) = -ax(t)$, $y(t) = x(t)$,
invariante della locazione l_1 : $x(t) \geq 18$,
dinamica della locazione l_2 : $\dot{x}(t) = -a(x(t) - 30)$, $y(t) = x(t)$,
invariante della locazione l_2 : $x(t) \leq 22$;
- transizione da l_1 a l_2 : $A/y(t), x(t) := x(t)$,
transizione da l_2 a l_1 : $B/y(t), x(t) := x(t)$,
dove $A = \{x(t) \mid x(t) \leq 19\}$,
dove $B = \{x(t) \mid x(t) \geq 21\}$
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $y(t) \in \text{Reali}$.

(a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

- (b) Si disegni qualitativamente l'evoluzione delle traiettorie del termostato sugli assi delle coordinate (con il tempo in ascissa e la variabile di stato $x(t)$ in ordinata) a partire da l_2 e $x(0) = 20$. Che cosa si può dire sull'insieme degli stati raggiungibili dell'automa? Per semplicità si assuma $a = 1$.

Traccia di risposta.

Un paio di traiettorie di $x(t)$ sono mostrate qualitativamente in Fig. 1.

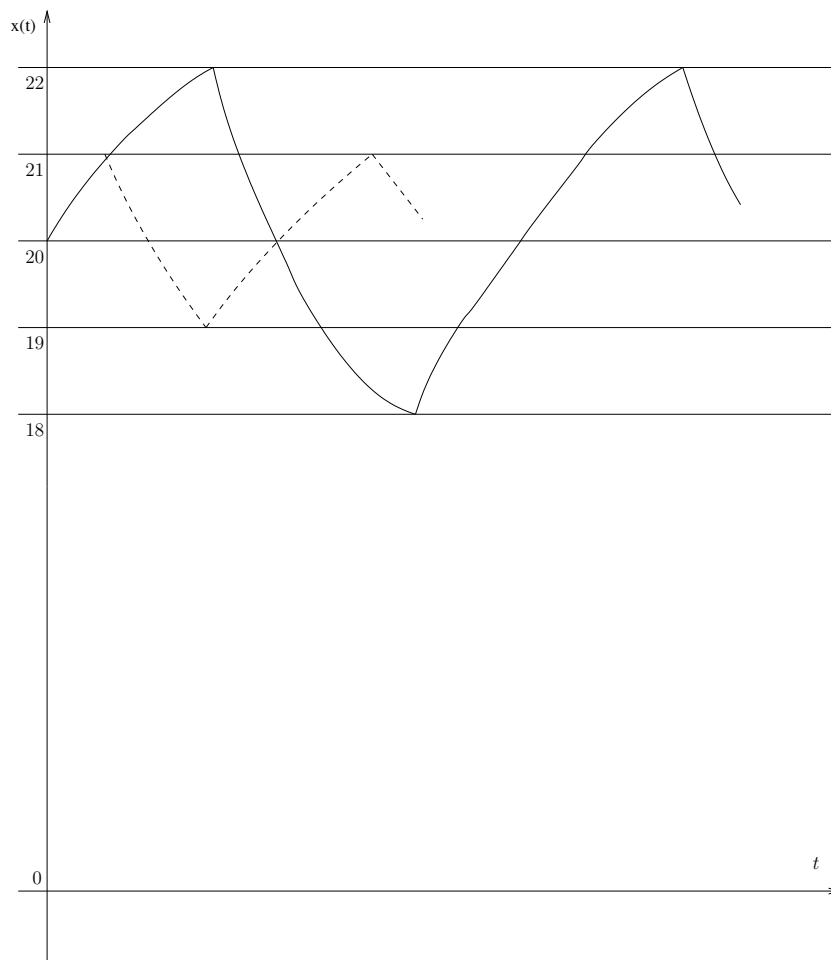


Figure 1: Due traiettorie di $x(t)$, una quando si rimane in una locazione per il tempo massimo possibile, l'altra per il tempo minimo possibile. Le traiettorie sono state tracciate qualitativamente senza rispettare le scale dimensionali.

Al flusso nella locazione l_1 : $\dot{x}(t) = -x(t)$, corrisponde l'integrale $x(t) =$

$c_1 e^{-t}$. Con la condizione iniziale $x(0) = 20$ si avrebbe $c_1 = 20$.

Al flusso nella locazione l_2 : $\dot{x}(t) = -(x(t) - 30)$, corrisponde l'integrale $x(t) = c_2 e^{-t} + 30$. Con la condizione iniziale $x(0) = 20$ si avrebbe $c_2 = -10$. Perciò la traiettoria a partire da l_2 sarà inizialmente data da $x(t) = -10e^{-t} + 30$, che è un esponenziale che tende asintoticamente a 30 da sotto per il tempo che va all'infinito. Quando $21 \leq x(t) \leq 22$ si può avere non-deterministicamente uno dei due casi: il sistema rimane in l_2 continuando lungo $x(t) = -10e^{-t} + 30$, oppure esegue una transizione discreta a l_1 passando alla dinamica $x(t) = c_1 e^{-t}$ (con l'opportuna condizione iniziale) che converge asintoticamente a 0. Quando $x(t) = 22$ il sistema deve eseguire la transizione discreta a l_1 . La situazione si ripete simmetricamente nella fascia $18 \leq x(t) \leq 19$, per decidere se rimanere in l_1 o tornare in l_2 . Le traiettorie continuano ad alternarsi nel tempo tra le due locazioni.

In definitiva ogni traiettoria rimarrà sempre nella fascia $18 \leq x(t) \leq 22$, fatto che si può dimostrare anche analiticamente.

- (c) L'automa del termostato presenta comportamenti zenoniani, cioè tali che si abbia un numero infinito di transizioni discrete in un tempo finito ?

Traccia di soluzione.

Il sistema non è zenoniano.

Una successione infinita di transizioni sarà del tipo ad es. $l_2 \rightarrow l_1 \rightarrow l_2 \rightarrow l_1 \dots$. Quando si ha una transizione $l_2 \rightarrow l_1$ deve essere $x \geq 21$; per la successiva transizione $l_1 \rightarrow l_2$ deve essere $x \leq 19$. Tra queste due transizioni il sistema si muove secondo $\dot{x}(t) = -x(t)$. Poiché all'inizio $x \geq 21$, deve essere $x(t) \geq 21e^{-t}$; inoltre per andare da l_1 a l_2 deve essere $x(t) \leq 19$, da cui $21e^{-t} \leq 19$ e quindi $t \geq -\ln 19/21 > 0$.

Dato che il tempo tra due transizioni successive è minorato da una costante positiva, non ci può essere un numero infinito di transizioni in un tempo finito.

Dettaglio Si potrebbe giustificare meglio la disequaglianza come segue. Da $-10e^{-t} + 30 = 21$ si ricava il tempo minimo a partire da $x(0) = 20$ a cui si può prendere la transizione $l_2 \rightarrow l_1$ che richiede che $x(t)$ sia arrivato almeno a 21 (partendo da 20 al tempo $t = 0$). Si ricava $t = -\ln 9/10 = \bar{t}$. Nella locazione l_1 si riparte con la traiettoria $x(t) = c_1 e^{-t}$ che imponendo valga almeno 21 al tempo \bar{t} permette di ricavare $c_1 e^{-\bar{t}} \geq 21$, e quindi $c_1 \geq 21e^{\bar{t}} \geq 21$. Ponendo $c_1 = 21$, si ha che la traiettoria $x(t) = 21e^{-t}$ raggiungerà il valore 19 quando $21e^{-t} \leq 19$ (prima di quando lo raggiungerebbe la traiettoria $x(t) = 21e^{-t+\bar{t}}$ che richiederebbe $t \geq -\ln 19/21 + \bar{t}$ e quindi $t \geq -\ln 19/21$). È sempre vero che il termostato dovrà stare in l_1 per un tempo $t \geq -\ln 19/21$ anche per le volte successive in cui esso entrerà nella locazione l_1 .