I momenti

Data una variabile *X* diremo momento di potenza di ordine *r* dall'origine *A* la Media aritmetica delle erresime potenze degli scarti fra ogni valore assunto dalla variabile e la costante *A*. analiticamente avremo:

$$_{A}\mu_{r} = M\left[(x-A)^{r}\right]$$

I momenti dall'origine

Si ricavano dall'espressione generale dei momenti ponendo *A=0*. In questo caso il deponente, collocato sulla sinistra della lettera greca μ, viene omesso:

$$\mu_{r} = M\left[(x)^{r}\right]$$

E rappresenta la media delle erresime potenze dei dati.

I momenti centrali

Sono la media delle erresime potenze degli scarti centrati sulla media aritmetica: rappresentano dunque lo sviluppo della formula generale per *A=m*:

$$_{m}\mu_{r} = M\left[(x-m)^{r}\right]$$

I **momenti centrali** si possono determinare in funzione dei **momenti dall'origine**:

$$_{m}\mu_{r} = \sum_{i=0}^{r}(-1)^{i}\binom{r}{i}\mu_{r-i}m^{i}$$

ESERCIZIO

Dati i seguenti valori: 1, 2, 4, 6, 7

a) calcolare il momento centrale di sesto ordine;
b) dimostrare la relazione esistente fra tale momento e i momenti dall'origine,
c) verificare la relazione trovata al punto b).

SOLUZIONI

a) $_m\mu_6 = M[(x-m)^6] = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^6}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - 4)^6}{5} = \dfrac{1586}{5} = \mathbf{317{,}2}$

$m_x = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 20/5 = 4$

x	$(x-m)^6$	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	729	1	1	1	1	1
2	64	4	8	16	32	64
4	0	16	64	256	1024	4096
6	64	36	216	1296	7776	46656
7	729	49	343	2401	16807	117649
20	1586	106	632	3970	25640	168466

b) $_m\mu_6 = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \binom{r}{i} \mu_{r-i} m^i =$

$= {}_0\mu_6 - 6\,{}_0\mu_5 m + 15\,{}_0\mu_4 m^2 - 20\,{}_0\mu_3 m^3 + 15\,{}_0\mu_2 m^4 - 5m^6$

c) $_m\mu_6 = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \binom{r}{i} \mu_{r-i} m^i =$

=33693,2-6*5128*4+15*794*4*4-20*126,4*4*4*4+15*21,2*4*4*4*4- 5*4*4*4*4*4*4=
=**317,2** (c.v.d.)

INDICI DI FORMA

La forma di una distribuzione si studia attraverso l'analisi della SIMMETRIA e dell'APPIATTIMENTO.

INDICI DI ASIMMETRIA

Definizione: Una distribuzione di frequenze $f(x)$ si dice **simmetrica** rispetto ad una asse di simmetria x_0 se sussiste la seguente relazione:

$$f(x_0-h)=f(x_0+h) \text{ (per ogni valore di } h\text{)}$$

Nelle distribuzioni unimodali, se la distribuzione è simmetrica allora la Media Aritmetica e la Mediana della distribuzione coincidono (: $M(X)=Med(X)$).

Inoltre:

- Se la distribuzione è obliqua a sinistra (asimmetria negativa) allora M(X)<Moda(X).
- Se la distribuzione è simmetrica (simmetria) allora M(X)=Med(x)=Moda(X).
- Se la distribuzione è obliqua a destra (asimmetria positiva) allora M(X)>Moda(X).

Coefficiente di Skewness **o** *Indice di Asimmetria di Pearson*

$$S_k = \frac{m - MODA}{\sigma}$$

Si tratta di un indice normalizzato, che assume valori nell'intervallo [-1,+1].

Se $S_k>0$ c'è asimmetria POSITIVA.

Se $S_k=0$ c'è simmetria.

Se $S_k<0$ c'è asimmetria negativa.

Indice di Asimmetria di Fisher ("GAMMA UNO")

L'Indice di Asimmetria di Fisher è definito come la Media aritmetica delle terze potenze della variabile standardizzata:

$$\gamma_1 = M\left(u^3\right) = M\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{{}_m\mu_3}{\sigma^3}$$

Se $\gamma_1>0$ c'è asimmetria POSITIVA.

Se $\gamma_1=0$ c'è simmetria.

Se $\gamma_1<0$ c'è asimmetria NEGATIVA.

INDICI DI APPIATTIMENTO O CURTOSI

L'appiattimento è un altro aspetto della forma di una distribuzione che riguarda il peso più o meno accentuato delle code rispetto alla parte centrale della distribuzione.
Per la distribuzione NORMALE si dimostra che vale la relazione:

$$ {}_m\mu_4 = 3\sigma^4 $$

Da cui

$$ \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} = 3 $$

Mentre di dimostra che

- Se la distribuzione è IPERNORMALE o LEPTOCURTICA allora $\frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} > 3$;
- Se la distribuzione è IPONORMALE o PLATICURTICA allora $\frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} < 3$.

Indice di Curtosi di Pearson ("BETA DUE")

L'Indice di Curtosi di Pearson è definito come la Media aritmetica delle quarte potenze della variabile standardizzata:

$$ \beta_2 = M\left(u^4\right) = M\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} $$

Se $\beta_2<3$ la distribuzione è IPONORMALE.

Se $\beta_2=3$ la distribuzione è NORMALE.

Se $\beta_2>3$ la distribuzione è IPERNORMALE.

Talvolta si utilizza l'***Indice di Curtosi di Fisher*** *("GAMMA DUE")*

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Se $\gamma_2<0$ la distribuzione è IPONORMALE.

Se $\gamma_2=0$ la distribuzione è NORMALE.

Se $\gamma_2>0$ la distribuzione è IPERNORMALE.

ESERCIZIO

Valutare la simmetria e l'appiattimento della seguente distribuzione:

x	f(x)
2	20
4	40
6	80
8	200
10	60

SOLUZIONI

La simmetria si può valutare indifferentemente con uno dei seguenti indici: *Indice di Skewness* S_k (se la distribuzione presenta la Moda) o γ_1.

$\mathbf{S_k} = \frac{m - MODA}{\sigma} = \frac{7,2-8}{2,04}$ =-0,39216

Essendo diverso da zero e negativo significa che la distribuzione è asimmetrica e obliqua a sinistra (: asimmetria negativa).

x	f(x)	x*f(x)	$(x\text{-}m)^2$*f(x)
2	20	40	540,8
4	40	160	409,6
6	80	480	115,2
8	200	1600	128
10	60	600	470,4
	400	2880	1664

m=M(x)=2880/400=7,2
MODA(x)=8 cui corrisponde la max frequenza.

$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1664/400} = \sqrt{4,16}$ =2,04

x	f(x)	$(x\text{-}7,2)^3$*f(x)
2	20	-2812,16
4	40	-1310,72
6	80	-138,24
8	200	102,4
10	60	1317,12
	400	-2841,6

${}_m\mu_3$ =(-2841,6)/400=-7,104

$\gamma_1 = \frac{{}_m\mu_3}{\sigma^3}$=(-7,104)/(2,04)^3=-0,8373

Essendo diverso da zero e negativo significa che la distribuzione è asimmetrica e obliqua a sinistra (: asimmetria negativa).

L'appiattimento si può valutare indifferentemente con uno dei seguenti indici: β_2 oppure γ_2.

$\beta_2 = \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} = \frac{56{,}8832}{(2{,}04)^4}$=3,287

Essendo maggiore di 3 significa che la distribuzione è leggermente ipernormale.

x	f(x)	$(x-7{,}2)^4 * f(x)$
2	20	14623,232
4	40	4194,304
6	80	165,888
8	200	81,92
10	60	3687,936
	400	22753,3

${}_m\mu_4$=22753,3/400=56,8832

$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0{,}28$

Essendo maggiore di 0 significa che la distribuzione è leggermente ipernormale.