

# Esercitazione su equazioni, disequazioni e trigonometria

DAVIDE BOSCAINI

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 6 Ottobre 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso [davide.boscaini@studenti.univr.it](mailto:davide.boscaini@studenti.univr.it).

**Esercizio 1.** Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 - 4 > 0.$$

*Soluzione.* Per prima cosa notiamo che il termine a sinistra del segno di disuguaglianza rappresenta la parabola di equazione  $y = x^2 - 4$ . Tale parabola è rivolta verso l'alto: il coefficiente del termine di secondo grado è positivo. Essa interseca poi l'asse delle ascisse nei punti  $x_1 = -\sqrt{4} = -2$  e  $x_2 = +\sqrt{4} = 2$ . Dal momento che stiamo cercando i valori per cui la parabola ha ordinate positive, la soluzione della nostra disequazione è

$$x < -2 \cup x > 2,$$

come si può facilmente capire osservando la figura 1.

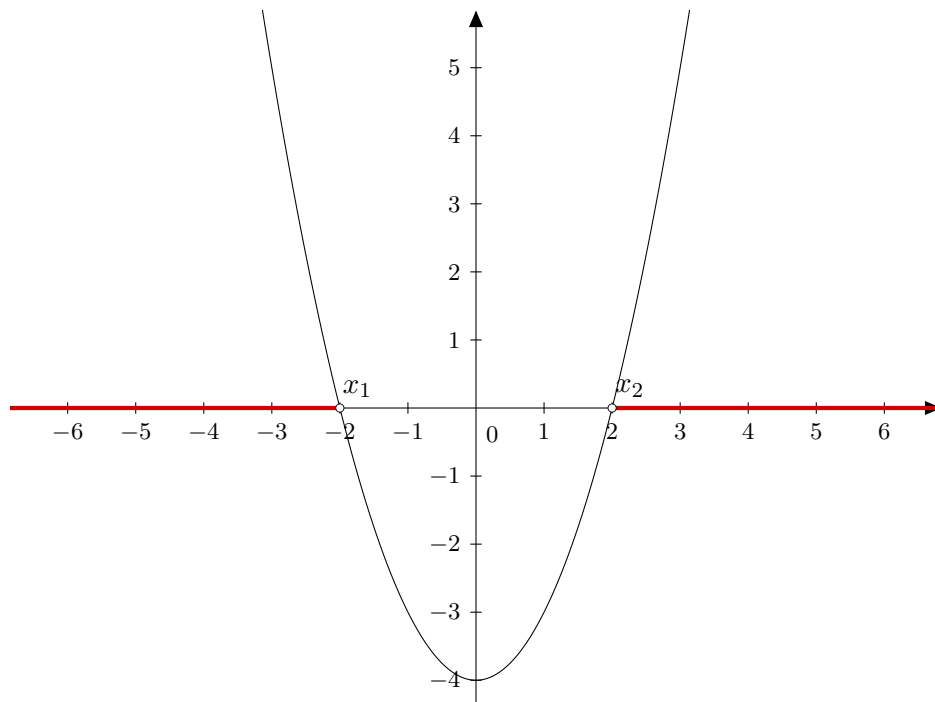


Figura 1: In rosso è evidenziata la soluzione della disequazione assegnata.



Attenzione, un comune errore è quello di scrivere la soluzione della disequazione assegnata come  $x > \pm 2$ . Questa soluzione è errata e questa scrittura non ha senso:  $x$  non può essere contemporaneamente maggiore di  $-2$  e  $+2$ .

**Esercizio 2.** Risolvere la seguente disequazione

$$x^2 + 9 < 0.$$

*Soluzione.* Questo esercizio è banale: un quadrato è sempre non negativo e se sommiamo ad un quadrato un numero strettamente positivo il risultato sarà ovviamente strettamente positivo. Si può quindi già concludere che non esiste  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfi l'equazione assegnata. Se tuttavia volessimo svolgere comunque i calcoli troveremo che il termine a sinistra del segno di disuguaglianza rappresenta una parabola di equazione  $y = x^2 + 9$ . Dal momento che  $\Delta = -36 < 0$  non esiste alcun  $x \in \mathbb{R}$  che sia soluzione dell'equazione  $x^2 + 9 = 0$ , la parabola cioè non interseca l'asse  $x$ . La parabola poi è rivolta verso l'alto, infatti il coefficiente del termine di secondo grado è positivo, segue quindi che non esiste alcun  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfi la disequazione assegnata, come si può facilmente capire osservando la figura 2.

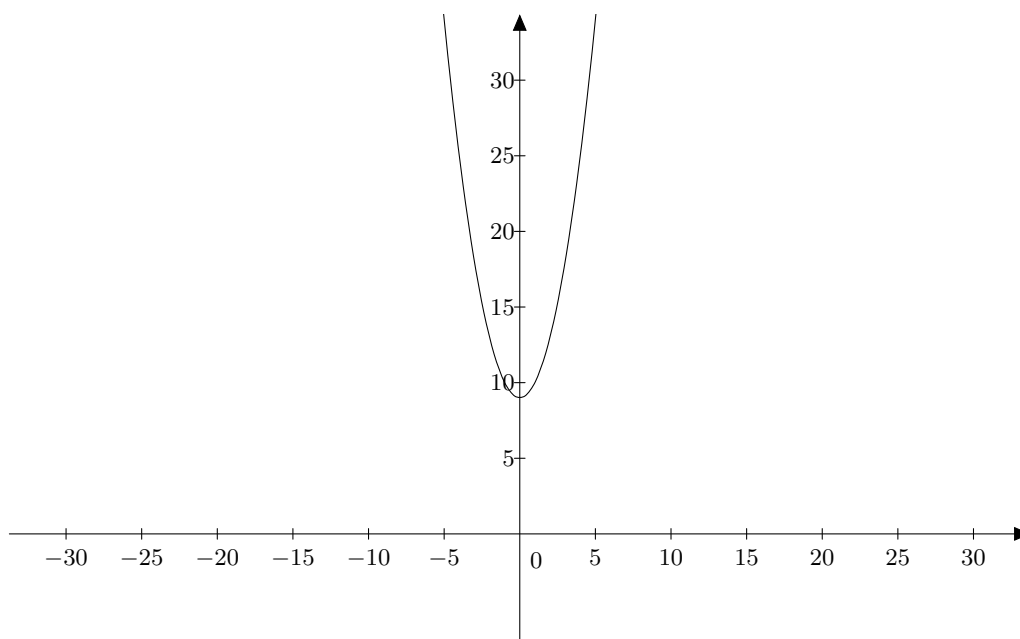


Figura 2: In rosso è evidenziata la soluzione della disequazione assegnata.



Attenzione, non è preciso dire che la disequazione assegnata *non ha soluzione*, si deve infatti precisare *in che insieme* non esiste soluzione. In questo caso ad esempio non esiste alcun  $x \in \mathbb{R}$  che soddisfi la disequazione assegnata, ma potrebbero esserci insiemi più vasti di  $\mathbb{R}$  per cui magari la disequazione ammette soluzione.

**Esercizio 3.** Risolvere la seguente disequazione

$$8x^3 + 2x^2 - x > 0.$$

*Soluzione.* Questo esercizio vuol far capire che non deve spaventare l'esponente 3. Infatti, se facciamo attenzione, ci accorgiamo che possiamo raccogliere  $x$  nel membro sinistro

della disequazione ed ottenere  $x(8x^2 + 2x - 1)$ , ci siamo così ricondotti al prodotto di due polinomi che sappiamo trattare: uno di primo grado ed uno di secondo. L'esercizio quindi ci chiede di capire quando il prodotto di due quantità, è positivo. Come è noto il prodotto è positivo quando entrambi i fattori sono positivi o quando entrambi sono negativi, la soluzione sarà quindi l'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x > 0, \\ 8x^2 + 2x - 1 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ 8x^2 + 2x - 1 < 0. \end{cases}$$

Per prima cosa notiamo che la parabola  $y = 8x^2 + 2x - 1$  interseca l'asse  $x$  nei punti  $x_1 = 1/4$  ed  $x_2 = -1/2$ . Essendo rivolta verso l'alto essa ha ordinate positive per  $x < x_1 \cup x > x_2$ , mentre ha ordinate negative per  $x_1 < x < x_2$ , come riportato in figura 3.

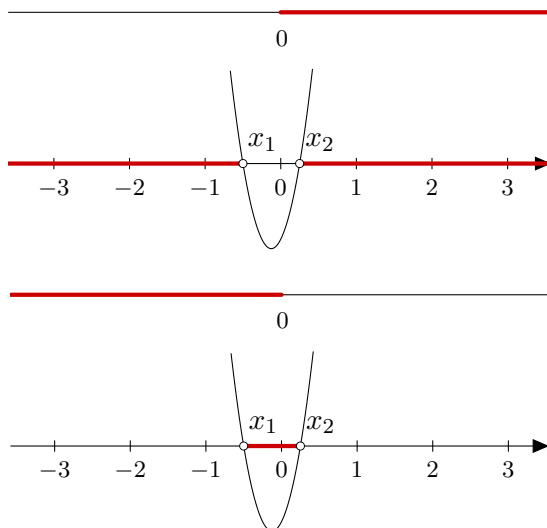


Figura 3: In alto sono evidenziate le soluzioni delle disequazioni che compongono il primo sistema, in basso quelle del secondo sistema.

Le soluzioni dei due sistemi si ottengono intersecando le soluzioni delle due disequazioni che lo compongono. In particolare la soluzione del primo sistema è  $x > x_2 = 1/4$ , mentre quella del secondo è  $-1/2 = x_1 < x < 0$ . Ora, per trovare la soluzione totale della disequazione assegnata non ci resta ora che fare l'unione delle due soluzioni, ecco quindi che la soluzione del nostro esercizio è

$$-1/2 < x < 0 \cup x > 1/4.$$

⚠ Attenzione, l'esercizio si poteva anche risolvere e, probabilmente, anche più velocemente usando la *tabella dei + e -*. Ho voluto tuttavia togliere un po' dell'alone di mistero sull'utilizzo di questa tabella e per chi ha ancora il dubbio: devo usare le *ondine* o la *tabella dei + e -*?

**Esercizio 4.** Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{2x^2 + x - 5}{x^2 - x - 2} \geq 1.$$

*Soluzione.* Questa è una disequazione fratta, quindi dovremo far attenzione a trattare nel modo adeguato numeratore e denominatore. Per prima cosa ci accorgiamo che a destra del segno di disuguaglianza compare un numero diverso da 0. Questo è un problema, infatti noi sappiamo dire quando un prodotto o una divisione è positiva o negativa, cioè  $> 0$  o  $< 0$ , ma in generale non sappiamo dire quando è maggiore di un'altra quantità, in questo caso 1. Porteremo quindi il termine incriminato a sinistra del segno di disuguaglianza e ci ricondurremo così alla disequazione

$$\frac{2x^2 + x - 5}{x^2 - x - 2} - 1 = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

Trattiamo ora separatamente numeratore e denominatore. Per quanto riguarda il numeratore abbiamo  $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ , che ha soluzione  $x \leq x_1 = -3 \cup x \geq x_2 = 1$ . Mentre per il denominatore abbiamo  $x^2 - x - 2 > 0$  (dove abbiamo usato  $>$  al posto di  $\geq$  poiché vogliamo escludere dalla soluzione i casi in cui il denominatore si annulla), che ha soluzione  $x < x_3 = -1 \cup x > x_4 = 2$ . A questo punto per individuare la soluzione totale non ci resta che ricorrere alla *tabella dei + e -*, che, come si può vedere in figura 4, ci fa trovare la soluzione

$$x \leq x_1 = -3 \cup -1 = x_3 < x \leq x_2 = 1 \cup x > x_4 = 2.$$

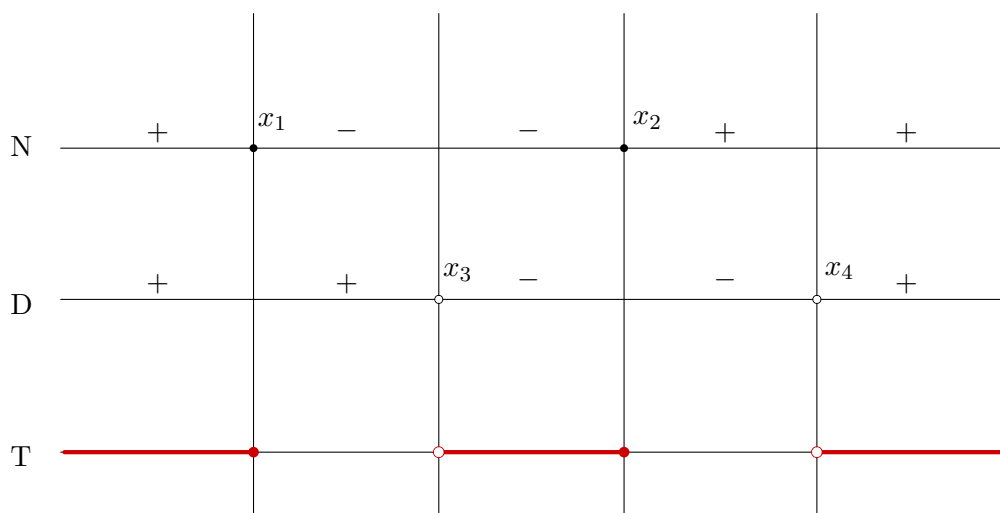


Figura 4: *Tabella dei + e -*. Con N indichiamo il comportamento del numeratore e con D quello del denominatore. Nella linea indicata con T, in rosso è evidenziata la soluzione della disequazione.



Bisogna fare attenzione ad escludere dalla soluzione i valori di  $x$  che annullano il denominatore. Può esser utile a questo proposito la convenzione di indicare con un pallino pieno i punti considerati e quindi appartenenti alla soluzione e con un pallino vuoto quelli esclusi, come fatto in figura 4.

**Esercizio 5.** Risolvere la disequazione

$$\frac{x + 1}{x} \geq 2.$$

*Soluzione.* Anche questa è una disequazione fratta. Per quanto visto nella discussione del precedente esercizio la prima cosa da fare è portare il 2 a sinistra del segno di disuguaglianza

ottenendo la disequazione

$$\frac{x+1}{x} - 2 = \frac{-x+1}{x} \geq 0.$$

Siamo ora in grado di risolverla: il numeratore  $-x+1$  è non negativo per  $x \leq 1$ , il denominatore è positivo per  $x > 0$ . Quindi la soluzione della disequazione assegnata è

$$0 < x \leq 1,$$

come si può vedere in figura 5.

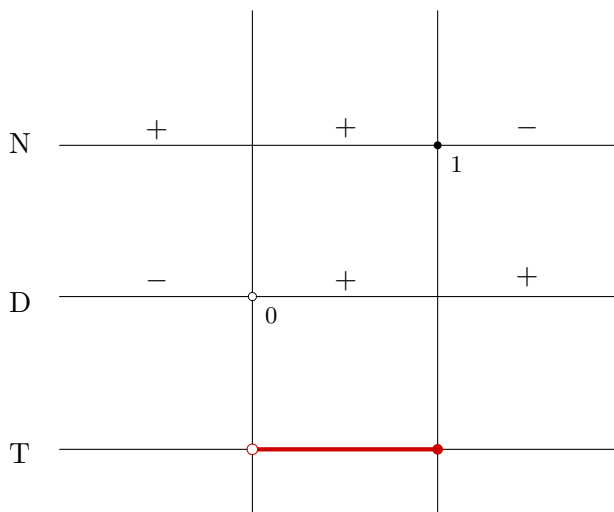


Figura 5: *Tabella dei + e -*. Con N indichiamo il comportamento del numeratore e con D quello del denominatore. Nella linea indicata con T, in rosso è evidenziata la soluzione della disequazione.



Attenzione, come si vede chiaramente dai calcoli precedenti, risolvere questa disequazione moltiplicando ambo i membri per  $x$ , non è il modo corretto di procedere. Infatti così facendo si trova  $x+1 \geq 2x$ , la cui soluzione è  $x \leq 1$ , che non coincide con quella corretta.

**Esercizio 6.** Risolvere la seguente disequazione

$$|x+1| > |x-3|.$$

*Soluzione.* Affrontiamo lo studio di questa disequazione per casi:

- se  $x \leq -1$ , allora entrambi i valori assoluti contengono quantità negative, quindi la disequazione diventa  $-(x+1) > -(x-3)$ , cioè  $x+1 < x-3$ , disequazione che non è mai soddisfatta;
- se  $x \geq 3$ , allora entrambi i valori assoluti contengono quantità positive, quindi la disequazione diventa  $x+1 > x-3$ , disequazione che è sempre soddisfatta;
- se  $-1 < x < 3$ , allora il primo valore assoluto contiene una quantità positiva mentre il secondo ne contiene una negativa. Si avrà allora  $x+1 > -(x-3)$ , cioè  $x-1 > 0$ , la cui soluzione è  $x > 1$ .

Tenendo conto di quanto trovato possiamo affermare che la soluzione è  $1 < x < 3 \cup x \geq 3$ , cioè

$$x > 1.$$

**Esercizio 7.** Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt{3x - 2\sqrt{x}} = \sqrt{2 - x}.$$

*Soluzione.* La prima cosa da fare è verificare che l'espressione assegnata abbia senso, dobbiamo cioè trovare il campo di esistenza (C.E.) delle soluzioni. Le condizioni da imporre sono

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3x - 2\sqrt{x} \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \end{cases}$$

dove nella prima condizione escludiamo il caso  $x = 0$  perché non può essere una soluzione: sostituendo tale valore all'interno dell'equazione si ha un assurdo. Ora dalla prima e terza equazione si trova la condizione  $0 < x \leq 2$ , mentre la seconda equazione può essere riscritta come  $3x \geq 2\sqrt{x}$  cioè  $9x^2 - 4x \geq 0$ , che ha soluzione  $x \leq 0 \cup x \geq 4/9$ . Intersecando le due soluzioni trovate troviamo che il C.E. della nostra equazione è  $4/9 \leq x \leq 2$ .

Passiamo ora a risolvere l'equazione assegnata. Elevando al quadrato entrambi i membri ottengo

$$\begin{aligned} 3x - 2\sqrt{x} &= 2 - x, \\ 2\sqrt{x} &= 2(2x - 1), \\ \sqrt{x} &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Elevando ancora entrambi i membri al quadrato otteniamo l'equazione  $x = 4x^2 - 4x + 1$ , cioè  $4x^2 - 5x + 1 = 0$ , che ha soluzioni  $x_1 = 1/4$  e  $x_2 = 1$ .

A questo punto ci ricordiamo che il C.E. dice che le soluzioni accettabili sono  $4/9 < x < 2$ , quindi visto che  $x_1 = 1/4 < 4/9$  dobbiamo escludere tale soluzione, mentre accettiamo la soluzione  $x_2 = 1$ . Segue quindi che la soluzione dell'equazione assegnata è

$$x = 1.$$



Attenzione, ricordarsi sempre di verificare se le soluzioni trovate soddisfano le ipotesi del C.E..

**Esercizio 8.** Risolvere le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} 10^x &= 100, \\ 4^x &= 3. \end{aligned}$$

*Soluzione.* Per la prima equazione non ci sono problemi: la soluzione è banalmente  $x = 2$ , mentre per la seconda si può vedere facilmente che non esiste alcun  $x \in \mathbb{Q}$  che può soddisfare la nostra equazione. Come facciamo allora a risolvere quest'equazione? Ricorrendo ai logaritmi. Per definizione, se  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$ , allora

$$x = \log_a b \iff a^x = b.$$

Nel nostro caso  $a = 4$  ( $a \neq 0, 1$  ed è positivo) e  $b = 3$ , quindi la soluzione è  $x = \log_4 3$ . Per poter calcolare il valore della soluzione è necessario esprimerla in base naturale o in base 10. Se  $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$  è un'altra base la regola del cambiamento di base dice che

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Scegliamo  $c = 10$  e otteniamo  $\log_4 3 = \log_{10} 3 / \log_{10} 4 \approx 0.79$ .

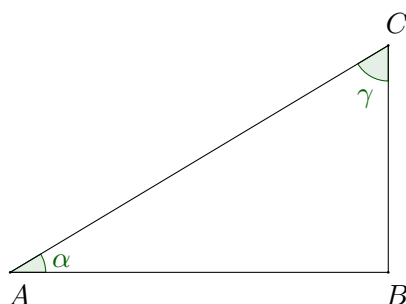
Passiamo ora alla trigonometria cominciando con alcune definizioni:

**Definizione 1.** Dato un triangolo rettangolo  $ABC$  retto in  $B$  chiamiamo  $\alpha$  l'angolo in  $A$  e  $\gamma$  l'angolo in  $C$ . Definiamo il seno dell'angolo  $\alpha$  come

$$\sin \alpha := \frac{CB}{AC} = \frac{\text{lato opposto}}{\text{ipotenusa}},$$

e il coseno dell'angolo  $\alpha$  come

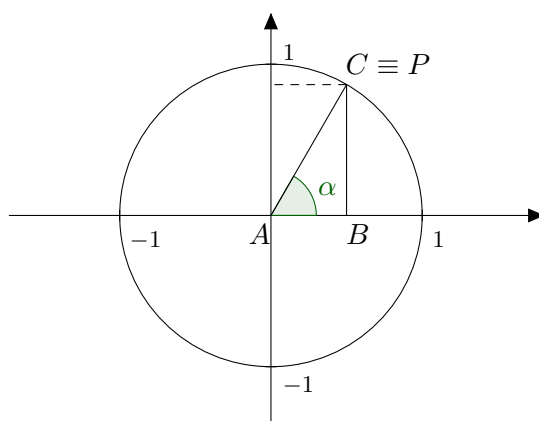
$$\cos \alpha := \frac{AB}{AC} = \frac{\text{lato adiacente}}{\text{ipotenusa}}.$$



Infine si può definire la tangente di  $\alpha$  in termini del seno e coseno di  $\alpha$  come

$$\tan \alpha := \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

È di particolare interesse il caso in cui l'ipotenusa è di lunghezza unitaria, in tal caso infatti coseno e seno rappresentano semplicemente le coordinate di un generico punto  $P$  appartenente ad una circonferenza unitaria, detta *circonferenza goniometrica*:



Grazie al *teorema di Pitagora* troviamo

$$AB^2 + CB^2 = AC^2,$$

vale cioè il seguente

**Teorema 1** (Proprietà fondamentale delle funzioni seno e coseno). *Vale*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

**Proposizione 1** (Formula di duplicazione del seno). *Vale*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Nota la proposizione 1 ed il teorema 1 si ricava

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2} \\ &= |\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha|, \end{aligned}$$

in particolare vale la seguente

**Proposizione 2** (Formula di duplicazione del coseno). *Vale*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Nella seguente tabella sono riassunti i valori di seno, coseno e tangente dei principali angoli noti

$x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

**Esercizio 9.** Determinare i valori di  $x$  per cui

$$\cos x \leq \frac{1}{2}.$$

*Soluzione.* La prima cosa da fare, proprio come avveniva con le precedenti disequazioni polinomiali, è capire quando vale l'uguaglianza, e cioè per quali  $x \in \mathbb{R}$  vale  $\cos x = 1/2$ . Aiutandoci con la tabella dei valori di seno e coseno degli angoli fondamentali troviamo che le soluzioni di quest'equazione sono  $x_1 = \alpha = \pi/3 + 2k\pi$  e  $x_2 = 5\pi/3 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ora notiamo che nel semipiano superiore il coseno decresce al crescere dell'angolo, mentre nel semipiano inferiore avviene il contrario, la soluzione quindi è costituita da tutti gli angoli compresi tra  $x_1$  ed  $x_2$ , estremi inclusi:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi + 2k\pi.$$

In figura 6 si può trovare la rappresentazione della soluzione sulla circonferenza goniometrica.

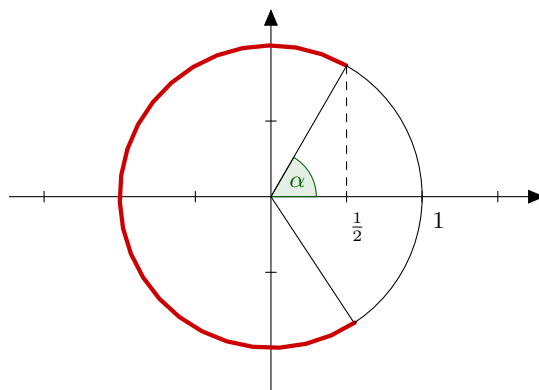


Figura 6: In rosso è evidenziata la soluzione della disequazione.

⚠ Attenzione, seno e coseno sono funzioni *periodiche*, si deve quindi ricordare che le soluzioni di equazioni che coinvolgono queste due funzioni sono infinite e tutte ottenibili sommando ad un valore noto multipli interi di  $2\pi$ .