Esercitazione del 16-11-11
Analisi I

Dott.ssa Silvia Saoncella
silvia.saoncella_3[at]studenti.univr.it

a.a. 2010-2011

Esercizio 1.
Determinare se la funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Svolgimento.
$f(x)$ è una funzione definita per casi. Osserviamo che $f(x) = \sin(1/x)/(1/x)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ in quanto rapporto di funzioni continue e $f(x) = 0$ è continua poiché funzione constante. L'unico punto in cui si va a studiare la continuità è il punto di raccordo $x = 0$. Bisogna verificare che il valore assunto dal limite sinistro di $f(x)$, coincida con quello assunto dal limite destro e con quello assunto dalla funzione nel punto $x = 0$. Quindi per calcolare i due limiti si considera il seguente

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

Mentre il valore della funzione nell'origine è $f(0) = 0$. Avendo trovato che i valori dei due limiti coincidono tra di loro e con il valore della funzione nell'origine si conclude che la funzione data è continua in tutto il suo dominio.
Esercizio 2.
Per quali valori $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{se } x < 0 \\ x - a^2 + 2a & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua?
Svolgimento.
In questo esercizio si ha che il limite sinistro è

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

mentre quello destro è

$$\lim_{x\to 0^+} x - a^2 + 2a = -a^2 + 2a = f(0)$$

che coincide con il valore assunto dalla funzione nell'origine. Per avere continuità nell'origine dobbiamo imporre che i valori dei due limiti coincidano tra di loro, cioè che

$$-a^2 + 2a = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

in conclusione si ha che la funzione è continua nel suo dominio se $a = 1$.
Esercizio 3.
Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x_0 = 0$
Svolgimento.
Per studiare la derivabilità di f nell'origine, si usa la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Si deve verificare che esiste finito il limite del rapporto incrementale. Quindi ci calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

pertanto, avendo trovato un valore finito, possiamo concludere che $f(x)$ è derivabile nell'origine.
Esercizio 4.
Determinare i punti di non derivabilità

$$f(x) = \cos \sqrt{|x|}$$

Svolgimento.
Per risolvere il seguente esercizio ricorriamo al seguente

Teorema. *Sia f una funzione continua in x_0 e derivabile in tutti i punti $x \neq x_0$ di un intorno x_0. Se esiste finito il limite per $x \to x_0$ della funzione f'(x), allora f è derivabile anche in x_0 e si ha*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

Questo teorema fornisce un modo alternativo per verificare la derivabilità di una funzione in un punto. Osserviamo che il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ in quanto composizione di funzioni continue. Riscriviamo $f(x)$ nel seguente modo

$$f(x) = \cos \sqrt{|x|} = \begin{cases} \cos \sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \cos \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Il punto dove si deve studiare la derivabilità della funzione è il punto di raccordo, cioè l'origine. Dobbiamo verificare che i limiti destro e sinistro, della derivata della funzione, coincidano tra di loro. Quindi la derivata laterale sinistra è

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin\sqrt{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$$

mentre quella destra è

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Essendo le due derivate laterali diverse, possiamo concludere che $f(x)$ non è derivabile nell'origine.
Possiamo inoltre dire che l'origine è un punto angoloso avendo trovato che esistono finiti e hanno valori diversi i due limiti.
Proviamo a rifare l'esercizio applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale e verifichiamo che si ottiene lo stesso risultato. Si ha $f(0) = 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{\operatorname{sign}(x)\,(\sqrt{|x|})^2} = -1/2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{\operatorname{sign}(x)\,(\sqrt{|x|})^2} = +1/2,$$

il che concorda con il risultato precedentemente trovato. Si conclude che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}$$

non esiste, quindi la funzione non è derivabile in 0.
Esercizio 5.
Tratto dall'eserciziario, n°7.2.20 pag. 97
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = 2x^4 - 2x^3 + 3$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.
Svolgimento.
L'equazione della retta tangente è data dalla seguente espressione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Quindi ci dobbiamo calcolare:
il valore della funzione in $x_0 = 1$,

$$f(1) = 3$$

la derivata di f,

$$f'(x) = 8x - 6x$$

il valore della derivata in $x_0 = 1$,

$$f'(1) = 2$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$y = 3 + 2(x-1) = 2x + 1$$

Esercizio 6.
Determinare la derivata di

$$g(y) = \arcsin y$$

Svolgimento.
Poniamo $f(x) = \sin x$, osserviamo che $g = f^{-1}$. Si ha che se $f(x) = y$, allora

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Pertanto si ha che se $y = \sin x$, allora

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x}$$

Da $y = \sin x$, si ricava che $x = \arcsin y$, quindi sostituendo si ha

$$g'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Ora ricordando dalla trigonometria che $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ e sostituendo $\arcsin y$ al posto di t, si ha

$$\frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin y)]^2} = \sqrt{1 - y^2}$$

quindi la derivata della funzione inversa è

$$g'(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

Vediamo ora un modo alternativo per calcolare la derivata della funzione inversa. In generale vale che

$$g^{-1} \circ g = \sin(\arcsin x) = x$$

quindi andando a derivare ambo i membri si ha

$$\cos(\arcsin x) \cdot \arcsin' x = 1$$

da cui si ricava che

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esercizio 7.
Determinare la derivata di

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{2x - 3}$$

Svolgimento.
In base alla regola di derivazione del quoziente

$$f'(x) = \frac{6x(2x-3) - (3x^2+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{6x^2 - 18x - 2}{(2x-3)^2}$$

Esercizio 8.
Determinare la derivata di

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Svolgimento.
Riscriviamo $f(x)$ nel seguente modo

$$f(x) = \mathrm{e}^{\log\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]} = \mathrm{e}^{x\log(1+\frac{1}{x})}$$

quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{x\log(1+\frac{1}{x})} \cdot \left[1 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right] \end{aligned}$$

Esercizio 9.
Determinare la derivata di

$$f(x) = \cos\left[\left(x^3 + x^4\right)^5\right]$$

Svolgimento.
Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f'(x) = -\sin\left[\left(x^3 + x^4\right)^5\right] \cdot 5\left(x^3 + x^4\right)^4 \cdot \left(3x^2 + 4x^3\right)$$

Esercizio 10.
Tratto dall'eserciziario, n°7.2.22 pag. 97
Se $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ e sia g la funzione inversa di f. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto di ascissa $x_0 = 3$ dopo aver verificato che f è invertibile.
Svolgimento.
Iniziamo con lo studio dell'invertibilità di f. Ci chiediamo se f è invertibile su tutto il suo dominio di definizione, cioè $\mathbb{R}$. Quando è che una funzione è invertibile? Quando è biiettiva. Ci interessa studiare l'iniettività poiché un polinomio di grado dispari è sicuramente una funzione suriettiva (è definito su tutto $\mathbb{R}$ e i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ sono infiniti di segni opposti, quindi per il teorema dei valori intermedi è sempre possibile determinare il valore corrispondente).

Quando una funzione è iniettiva? Una condizione sufficiente è che la funzione sia strettamente crescente oppure strettamente decrescente. Per capire ciò si studia la derivata prima:

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, il che implica che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Quindi f è invertibile su tutto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ci manca da studiare l'invertibilità nel punto $x = 0$. Ci chiediamo quanto vale la funzione nell'origine, si ha

$$f(0) = 1$$

Poi risolviamo l'equazione

$$f(x) = 1$$

quindi si ha

$$x^5 + x^3 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^5 + x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3(x^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

quindi abbiamo trovato che $f(x) = 1$ se e solo se $x = 0$, cioè esiste un unico valore. Quindi la funzione è invertibile anche nell'origine. (Si osservi che se, per esempio, avessimo trovato $x = 0$ e $x = 1$, la funzione non sarebbe stata più iniettiva e quindi non invertibile).

Andiamo ora a determinare la retta tangente alla funzione inversa g:

$$y = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0)$$

Iniziamo con il calcolare $g(3)$. Sappiamo che

$$g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

A questo punto dobbiamo determinare chi è il valore x_0, cioè dobbiamo determinare quell'unico x_0 tale che $f(x_0) = 3$ (sappiamo che x_0 è unico perché lo abbiamo verificato prima). Ma allora ponendo $x_0 = 1$ si trova che $f(1) = 3$, quindi passando all'inversa si ha che $g(3) = 1$. A questo punto possiamo calcolare

$$g(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+3} = \frac{1}{8}$$

In definitiva la retta tangente alla funzione g è

$$y = 1 + \frac{1}{8}(x - 3) = \frac{x}{8} + \frac{5}{8}$$

Esercizio 11.
Tratto dall'eserciziario, n°7.2.8 pag. 95
Se $f(t) = t^2$ e $g(s) = e^s$, determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione composta $f \circ g$ nel punto di ascissa $s_0 = 1$.

Svolgimento.
Sia $h = f \circ g$, quindi

$$h(s) = (e^s)^2 = e^{2s}$$

L'equazione della retta tangente è

$$y = h(s_0) + h'(s_0)(x - s_0)$$

Quindi ci dobbiamo calcolare:
il valore della funzione in $s_0 = 1$,

$$h(1) = e^2$$

la derivata di f,

$$h'(x) = 2e^{2s}$$

il valore della derivata in $s_0 = 1$,

$$h'(1) = 2e^2$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$y = e^2 + 2e^2(x - 1) = 2e^2x - e^2$$

Esercizio 12.
Tratto dall'eserciziario, n°7.2.13 pag. 95
Per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $r(x) = x + \beta$ è tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(2 + x)$?
Svolgimento.
Si osservi che non è dato il punto di tangenza, quindi svolgeremo l'esercizio chiamandolo x_0. Calcoliamo la retta tangente a f, quindi calcoliamo il valore della funzione in x_0,

$$f(x_0) = \log{(2 + x_0)}$$

la derivata di f,

$$f'(x) = \frac{1}{2 + x}$$

il valore della derivata in x_0,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2 + x_0}$$

Pertanto l'equazione della retta tangente è

$$y = \log{(2 + x_0)} + \frac{1}{2 + x_0}(x - x_0) = \frac{x}{2 + x_0} - \frac{x_0}{2 + x_0} + \log{(2 + x_0)}$$

A questo punto dobbiamo determinare il valore del parametro β. Basta imporre che i coefficienti della retta r coincidano con quelli di y. Quindi si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2 + x_0} = 1 \\ \\ -\dfrac{x_0}{2 + x_0} + \log{(2 + x_0)} = \beta \end{cases}$$

Dalla prima ci ricaviamo che $x_0 = -1$ che sostituita nella seconda porta a $1 + \log{(2 - 1)} = \beta$, quindi $\beta = 1$.