COGNOME ______ NOME ______ Matr. ______

Firma dello studente ______

A

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

Tempo: 3 ore.

<u>Prima parte: test a risposta multipla.</u> Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:** Il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+5}+\frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi}+\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}\right)$$

vale?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

✎ **Test 2:** Sia data la funzione

$$f(x)=\frac{\log(1+\sin^2(3x))}{1+e^{x^2-1}}$$

Allora $f'(\pi)$ =?

(A) -6 (B) $\frac{1}{1+e^{\pi^2-1}}$ (C) -1 (D) 0

✎ **Test 3:** Sia $z=1-2i$. Allora esprimere in forma algebrica il seguente numero complesso

$$\frac{(\bar{z})^2+iz+3}{z+|z|^2 i}$$

(A) $\frac{-17+11i}{10}$ (B) $\frac{13-i}{10}$ (C) $\frac{13+11i}{10}$ (D) $\frac{17-i}{10}$

✎ **Test 4:**

$$\int \frac{1}{x}\log\log x\,dx=$$

(il logaritmo si intende in base e)

(A) $\frac{1}{2}\log^2(\log x)+C$ (B) $\log(\log(\log x))+C$ (C) $\log x(\log\log x)-\log x+C$ (D) $\log\log x-1+C$

✎ **Test 5:** Sia x_0 il punto di massimo per la funzione

$$f(x)=\arctan\sqrt{x}-\log(1+x)$$

sull'intervallo $[0,e^2-1]$ e $y_0=f(x_0)$. Allora $4x_0$ vale?

(A) 1 (B) 1/2 (C) 1/4 (D) 2

✎ **Test 6:** Il polinomio di Mac Laurin di ordine 4 della funzione

$$(\sin(3x))^2-4\log(1+x^2)$$

vale?

(A) $5x^2+29x^4$ (B) $5x^2-25x^4$ (C) $13x^2-25x^4$ (D) $13x^2+29x^4$

Soluzione dei test:

✎ **Test 1:**

Supponendo che non ci siano forme di indecisione, svolgiamo i tre limiti separatamente. Dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+5}=1$$

invece dal teorema del confronto si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n^2+1)}{n^\pi}=0.$$

Infine

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\log\left(2+\frac{1}{n}\right)\right)=1$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty}\log\left(2+\frac{1}{n}\right)=\log 2.$$

Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Test 2:**

Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{1+\sin^2(3x)}2\sin(3x)\cos(3x)3\right)(1+e^{x^2-1})-2x(e^{x^2-1})\log(1+\sin^2(3x))}{(1+e^{x^2-1})^2}$$

da cui in modo evidente si ottiene $f'(\pi)=0$, quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ **Test 3:**

Si ha

$$z=1-2i\qquad \bar{z}=1+2i\qquad (\bar{z})^2=1+4i-4=-3+4i$$

da cui

$$\frac{(\bar{z})^2+iz+3}{z+|z|^2i}=\frac{-3+4i+i+2+3}{1-2i+5i}=\frac{2+5i}{3i+1}\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{2-6i+5i+15}{10}=\frac{17-i}{10}$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(D)}}$.

✎ **Test 4:**

Proviamo ad operare la seguente sostituzione

$$\log x=t\qquad x=e^t\qquad dx=e^t\,dt$$

da cui

$$\int\frac{1}{x}\log(\log x)\,dx=\int\frac{1}{e^t}\log t\,e^t\,dt=\int\log t\,dt=t\log t-t+C=(\log x)(\log(\log x))-\log x+C$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$ (N.B. è chiaro che derivando le quattro espressioni delle risposte si ottiene sicuramente quella che è la classe di primitive richieste).

✎ **Test 5:**

La funzione data è continua e derivabile su $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ con derivata

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{1+x}=\frac{1-2\sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

che si annulla per $x=1/4$. Valutando il segno della derivata prima si ottiene che la funzione prima cresce e poi decresce, perciò $x_0=1/4$ è il punto di massimo nell'intervallo richiesto. Quindi siccome viene richiesto il valore $4x_0$ si ha che la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ **Test 6:**

Usando gli sviluppi di Mac Laurin delle funzioni seno e logaritmo si ha che

$$(\sin(3x))^2=\left(3x-\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)\right)^2=9x^2-27x^4+o(x^4)$$

mentre

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

da cui

$$(\sin(3x))^2 - 4\log(1+x^2) = 9x^2 - 27x^4 - 4x^2 + 2x^4 + o(x^4) = 5x^2 - 25x^4 + o(x^4)$$

La risposta corretta è pertanto la $\boxed{\text{(B)}}$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Esercizio (4 punti)** Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la seguente serie numerica?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} \arctan \frac{1}{n^3}}{7n^2 + n^4 \sin \frac{1}{n^2}}$$

Si tratta senza dubbio di una serie a termini non negativi. Dai limiti notevoli si ottiene che, per $n \to \infty$

$$\arctan \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3} \qquad n^4 \sin \frac{1}{n^2} \sim n^4 \frac{1}{n^2} = n^2$$

quindi dal criterio del confronto asintotico la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^3(7n^2 + n^2)} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5-\alpha}}$$

che è una serie armonica generalizzata di esponente $\gamma = 5 - \alpha$ e dunque converge se $\gamma > 1$ cioè se $5 - \alpha > 1$ ossia $\alpha < 4$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^3(3x)} \int_0^{e^{3x}-1} \log(1 + t^2)\, dt$$

Primo modo: Proviamo a calcolare la primitiva della funzione $\log(1 + t^2)$. Integrando per parti si ha

$$\int \log(1 + t^2)\, dt = t \log(1 + t^2) - \int \frac{2t^2}{1 + t^2}\, dt = t \log(1 + t^2) - 2t + 2 \arctan t + C$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{3x}-1} \log(1 + t^2)\, dt &= \left[t \log(1 + t^2) - 2t + 2 \arctan t\right]_0^{e^{3x}-1} \\ &= (e^{3x} - 1) \log(1 + (e^{3x} - 1)^2) - 2(e^{3x} - 1) + 2 \arctan(e^{3x} - 1) \end{aligned}$$

A questo punto il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^3(3x)} \int_0^{e^{3x}-1} \log(1 + t^2)\, dt$$

diventa

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(e^{3x} - 1) \log(1 + (e^{3x} - 1)^2) - 2(e^{3x} - 1) + 2 \arctan(e^{3x} - 1)}{\sin^3(3x)}$$

che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{3x} - 1 = 3x + o(x)$$

da cui

$$\log(1 + (e^{3x} - 1)^2) = (e^{3x} - 1)^2 + o((e^{3x} - 1)^2) = 9x^2 + o(x^2)$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$o((e^{3x} - 1)^2) = o(x^2)$$

visto che

$$e^{3x} - 1 \sim 3x.$$

D'altra parte

$$\arctan(e^{3x} - 1) = (e^{3x} - 1) - \frac{1}{3}(e^{3x} - 1)^3 + o((e^{3x} - 1)^3)$$

quindi riassumendo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(e^{3x} - 1) \log(1 + (e^{3x} - 1)^2) - 2(e^{3x} - 1) + 2 \arctan(e^{3x} - 1)}{\sin^3(3x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{27x^3 + o(x^3) - \frac{2}{3}27x^3 + o(x^3)}{27x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3}.$$

Secondo modo: si tratta di una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Proviamo ad applicare il teorema di de l'Hospital. Usando il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin^3(3x)} \int_0^{e^{3x}-1} \log(1 + t^2)\, dt \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{3x} - 1)^2) e^{3x} 3}{3 \sin^2(3x) \cos(3x) 3}$$

A questo punto dai limiti notevoli, per $x \to 0^+$ si ottiene

$$\log(1 + (e^{3x} - 1)^2) \sim (e^{3x} - 1)^2 \sim (3x)^2 = 9x^2$$

mentre

$$\sin^2(3x) \sim (3x)^2 = 9x^2$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + (e^{3x} - 1)^2)e^{3x}3}{3\sin^2(3x)\cos(3x)3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{27x^2e^{3x}}{81x^2\cos(3x)} = \frac{1}{3}.$$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 24.02.2012

✎ **Esercizio (8 punti)**

Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\pi x + 3}{|x - \pi|}$$

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi x + 3}{x - \pi} =: g(x) & x \geq \pi \\ \dfrac{\pi x + 3}{\pi - x} =: h(x) & x < \pi \end{cases}$$

Il dominio della funzione assegnata è $x \neq \pi$. La retta $x = \pi$ un asintoto verticale per la funzione, infatti

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} h(x) + \infty,$$
$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} g(x) + \infty.$$

I punti di intersezione con gli assi sono $(-3/\pi, 0)$ e $(0, 1 + 3/\pi)$, mentre $f(x) > 0$ per $x > -3/\pi$. Ora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi x}{x - \pi} + \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x - \pi} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi}{1 - \pi/x} = \pi,$$

mentre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} -g(x) = -\pi.$$

Le derivate prime di $g(x)$ ed $h(x)$, sono

$$g'(x) = \frac{\pi(x - \pi) - (\pi x + 3)}{(x - \pi)^2} = -\frac{\pi^2 + 3}{(x - \pi)^2} < 0$$

e

$$h'(x) = -g'(x) > 0.$$

Quindi la funzione è crescente per $x < \pi$ e decrescente per $x > \pi$. Le derivate seconde sono

$$g''(x) = \frac{2(\pi^2 + 3)(x - \pi)}{(x - \pi)^4} > 0$$

e

$$h''(x) = -g''(x) < 0,$$

quindi la funzione è concava per $x < \pi$ e convessa per $x > \pi$. Il grafico è riportato in figura 1.

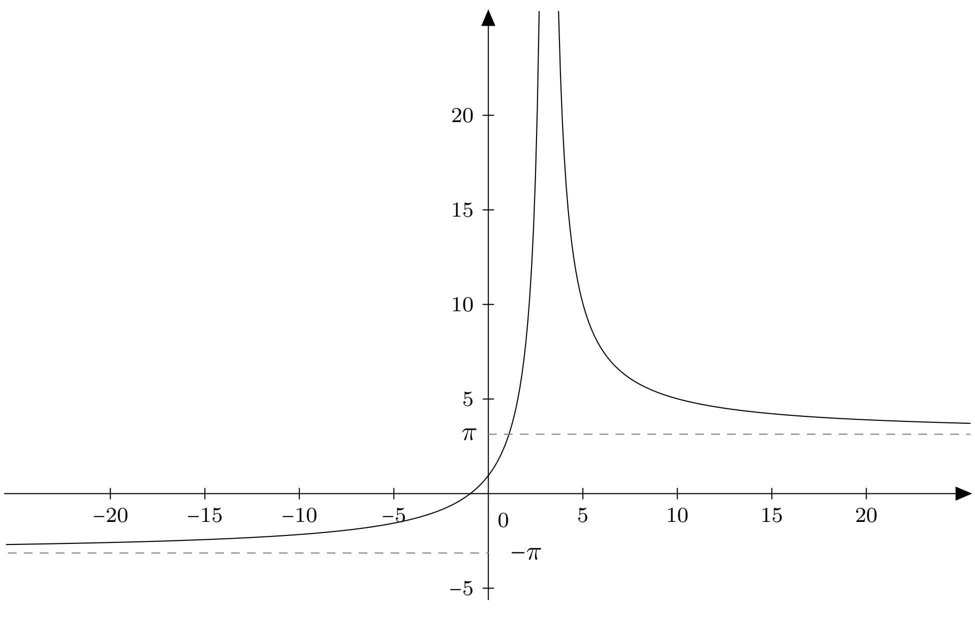

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = (\pi x + 3)/|x - \pi|$.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 10.02.2012

✎ **Tema: (5 punti)**

Definire il concetto di limite di successione, di successione limitata e di successione convergente. Indicare quali relazioni esistono tra questi concetti fornendo opportuni esempi e controesempi.

Una successione $\{a_n\}_n$ si dice LIMITATA SUPERIORMENTE se esiste M tale che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si dice LIMITATA INFERIORMENTE se esiste m tale che $a_n \geq m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; si dice LIMITATA se è limitata inferiormente e superiormente. Tali proprietà possono anche valere definitivamente (cioè da un certo $\bar{n}$ in poi). In particolare una successione definitivamente limitata è limitata; infatti si ha il seguente risultato:
Proposizione: sia $\{a_n\}_n$ una successione; se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che definitivamente $a_n \leq M$ [[$\geq M$]]allora la successione $\{a_n\}_n$ è limitata superiormente [[inferiormente]].
Esempi: $\{n^2\}$ è *limitata inferiormente ma non superiormente*, $\{(-1)^n\}$ è *limitata*, $\{(-2)^n\}$ *non è limitata.*
Una successione $\{a_n\}_n$ si dice CONVERGENTE se esiste $\ell \in \mathbb{R}$ con questa proprietà

$$\forall \varepsilon \text{ definitivamente } |a_n - \ell| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il numero ℓ si chiama LIMITE DELLA SUCCESSIONE e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to \ell \text{ per } n \to \infty$$

Teorema Il limite di una successione, se esiste, è unico.
Graficamente: una successione tende a ℓ se fissata una striscia orizzontale centrata in ℓ e di semiampiezza ε (fissata una striscia orizzontale $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$ "comunque stretta"), da un certo indice in poi i punti della successione non escono dalla striscia; infatti

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

Conseguenza importante: *Ogni successione convergente è limitata.* Intuitivamente: da un certo punto in poi, tutti i punti della successione stanno in una striscia, quindi la successione è definitivamente limitata; prima rimangono fuori solo un numero finito di punti, quindi si prende il massimo di questi in valore assoluto e questo costituisce il limite superiore (e con il segno contrario anche il limite inferiore). Si noti che non vale il viceversa. Esistono infatti successioni limitate ma non convergenti. Controesempio: $a_n = (-1)^n$.
Una successione si dice DIVERGENTE A $+\infty$ se

$$\forall M > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ a_n > M$$

Una successione si dice DIVERGENTE A $-\infty$ se

$$\forall \overline{M} < 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ a_n < \overline{M}$$

In tal caso $+\infty$ o $-\infty$ sono i limiti delle successioni divergenti e scriveremo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

Una successione che non ammette limite si dice IRREGOLARE O INDETERMINATA. Esempio: $n \mapsto (-1)^n$. Una successione che tende a zero si dice INFINITESIMA. Una successione divergente (positivamente o negativamente) si dice INFINITA.
Un risultato importante coinvolge la proprietà di monotonia per la successione.
Una successione $\{a_n\}$ è MONOTONA CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$; diremo che essa è MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$; diremo che essa MONOTONA DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$; diremo infine che essa è MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$.
Ad esempio $n \mapsto n^2$ è monotona strettamente crescente; $n \mapsto \frac{1}{n}$ monotona strettamente decrescente; $n \mapsto (-1)^n$ non è monotona.
Vale il seguente importante risultato.
Teorema: Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata. Allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Analogamente se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità dei numeri reali e quindi vale se siamo in $\mathbb{R}$. Ad esempio, non è vero che una successione crescente e limitata di numeri razionali ammette sempre limite razionale. Come conseguenza si ha che:
sia $\{a_n\}$ una successione monotona e crescente. Allora esiste

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

analogamente sia $\{a_n\}$ una successione monotona e decrescente. Allora esiste

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esplicitamente: se $\{a_n\}$ è superiormente limitata allora converge a un numero reale; se è superiormente illimitata allora diverge. Quindi *una successione monotona converge o diverge; non pu essere irregolare.*