Tutoraggio Analisi II

a.a 2012/2013

dott. ssa Saccella S.

Lezione del 14/11/2012

Ricordiamo i seguenti fatti:

- Sia C una curva piana semplice e regolare di equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad \text{con} \quad a \le t \le b$$

La lunghezza della curva C viene definita nel modo seguente:

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$$

NOTA: La lunghezza non dipende né dagli assi di riferimento, né dalla particolare rappresentazione parametrica.
Dipende soltanto dalla curva C.

- In particolare, se C è una curva piana rappresentata, nell'intervallo $[a,b]$, dall'equazione $y = f(x)$, con $f(x) \in C^1$, la lunghezza L di C è data da

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

- Infine, se la curva C è rappresentata, nell'intervallo $\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$ dall'equazione polare

$$\rho = \rho(\vartheta) \qquad \text{dove} \quad \rho(\vartheta) \in C^1$$

la lunghezza L di C è data da

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)}\, d\vartheta$$

Esercizio 1.

Si consideri la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^3, 3t^2) & t \in [0, 1/2] \\ \left(\frac{(1-t^2)}{6}, 1-t^2\right) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Si abbozzi un disegno di γ e se ne calcoli la lunghezza.

Soluzione

Si ha che la curva $\gamma(t)$ è definita per casi. Quando $t \in [0, 1/2]$ abbiamo $\gamma_1(t) = (t^3, 3t^2)$, invece quando $t \in [1/2, 1]$ abbiamo $\gamma_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{6}, 1-t^2\right)$.

1) Rappresentiamo γ_1:

Dalla parametrizzazione di $\gamma_1(t)$ ci abbiamo ricavare il parametro t. Quindi da $x = t^3$ ricavo che $t = \sqrt[3]{x}$ che sostituito in $y = 3t^2$ pone $y = 3\sqrt[3]{x^2}$ dove $0 \leq x \leq 1/8$.

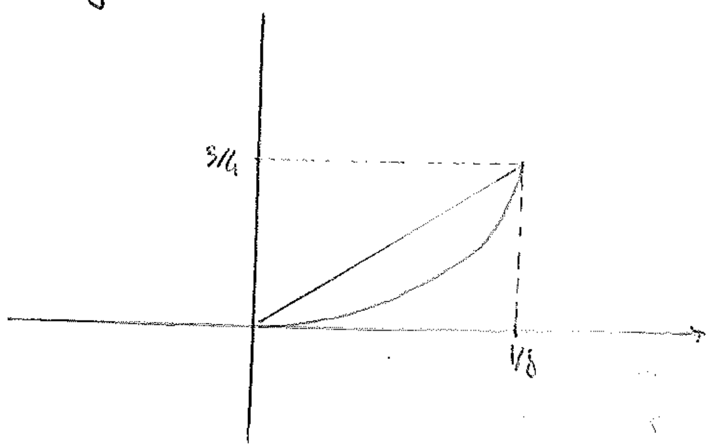
Si ha che per l'intervallo considerato $y'(x) > 0$ e $y''(x) > 0$.

Quindi la funzione è concava e strettamente crescente. Inoltre si ha che passa per i punti $\gamma_1(0) = (0,0)$ e $\gamma_1(1/2) = (1/8, 3/4)$.

2) Rappresentiamo γ_2:

Dalla parametrizzazione di $\gamma_2(t)$ si ricava che $1 - t^2 = 6x$, da cui $y = 6x$. Inoltre abbiamo che $\gamma_2(1/2) = (1/8, 3/4)$ e $\gamma_2(1) = (0,0)$.

La rappresentazione grafica è pertanto



La curva γ è un circuito percorso in senso orario.

Calcoliamo ora la lunghezza. Iniziamo con il calcolare $\dot{\gamma}_1(t)$ e $\dot{\gamma}_2(t)$. ②
Quindi

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 6t \end{pmatrix} \quad e \quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} -t/3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Ora applicando la formula per la lunghezza di una curva abbiamo:

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{9t^4 + 36t^2}\, dt + \int_{1/2}^{1} \sqrt{\frac{t^2}{9} + 4t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{1/2} 3t\sqrt{t^2+4}\, dt + \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{37}}{3} t\, dt$$

$$d(t^2+4) = 2t\, dt$$

$$w = t^2+4 \qquad t=0 \to w=4, \quad t=1/2 \to w = 17/4$$

$$= \frac{2}{3}\int_4^{17/4} \sqrt{w}\, dw + \frac{\sqrt{37}}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left[x^{3/2}\right]_4^{17/4} + \frac{\sqrt{37}}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{17\sqrt{17}}{8} - 8 + \frac{\sqrt{37}}{8}$$

ESERCIZIO 2

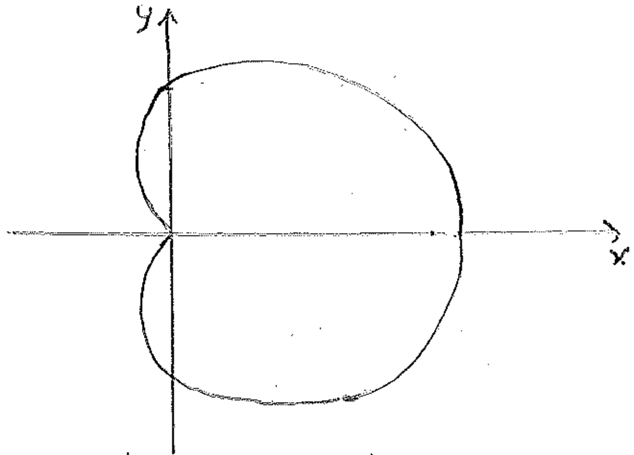
Calcolare la lunghezza della cardioide data dalla seguente equazione polare:

$$\rho = 2a(1+\cos(\vartheta)) \qquad \text{dove } a>0$$

Determinare poi i valori di ϑ tali che la retta tangente alla cardioide è parallela ad uno degli assi cartesiani. (Si studi il caso in cui la retta tangente è parallela all'asse x).

SOLUZIONE

Il grafico della cardioide è il seguente:



Osserviamo che nell'origine si ha una singolarità.
Sfruttando la simmetria della curva rispetto all'asse x, andremo a calcolare la lunghezza dell'arco di cardioide compreso tra il primo ed il secondo quadrante e poi moltiplicheremo il risultato per 2.
Ci calcoliamo

$$\rho' = -2a\sin\vartheta$$

poi calcoliamo

$$\rho^2+\rho'^2 = 4a^2(1+\cos(\vartheta))^2+4a^2\sin^2(\vartheta) = 4a^2\left(1+2\cos(\vartheta)+\cos^2(\vartheta)+\sin^2(\vartheta)\right) =$$

$$= 8a^2(1+\cos(\vartheta)) = 16a^2\left(\frac{1+\cos(\vartheta)}{2}\right)$$

infine calcoliamo

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = 4a\sqrt{\frac{1+\cos(\vartheta)}{2}} = 4a\cos(\vartheta/2)$$

Come estremi per il parametro ϑ, abbiamo $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$.
Quindi, applicando la formula, abbiamo che la lunghezza cercata è

$$L = \int_0^{\pi} 4a\cos(\vartheta/2)\,d\vartheta = 8a\int_0^{\pi/2} \cos(s)\,d(s) = 8a\big[\sin(s)\big]_0^{\pi/2} = 8a$$

avendo posto $s = \vartheta/2$, quindi $d\vartheta = 2ds$.
Pertanto la lunghezza della cardioide è

$$L = 16a.$$

Procediamo ora con il calcolo della retta tangente alla cardioide.
Richiamo

Sia $\gamma(t)$ l'equazione parametrica di una curva di classe C^1.
Allora l'equazione della retta tangente alla curva γ nel punto $P = \gamma(t_0)$ è data da

$$r(t) = \gamma(t_0) + \dot{\gamma}(t_0)\cdot t$$

dove $\dot{\gamma}(t_0)$ è il vettore tangente e $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.

Ritornando all'esercizio, abbiamo bisogno di scrivere l'equazione della cardioide in forma parametrica. Quindi

$$\gamma(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta) = \rho\cos\vartheta = 2a(1+\cos\vartheta)\cdot\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = \rho\sin\vartheta = 2a(1+\cos\vartheta)\cdot\sin\vartheta \end{cases}$$

Calcoliamo ora $\dot{\gamma}(\vartheta)$, quindi

$$\dot{\gamma}(\vartheta) = \begin{cases} \dot{x}(\vartheta) = \dot{\rho}\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta \\ \dot{y}(\vartheta) = \dot{\rho}\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta \quad (*) \end{cases} \quad \text{dove } \dot{\rho} = -2a\sin\vartheta$$

Affinché $\dot{\gamma}(t_0)$ sia parallela all'asse x, dovrà essere $\dot{y}(t_0) = 0$ (cioè vogliamo la seconda componente del vettore tangente essere nulla).

Quindi abbiamo

$$0 = -2a\sin^2(\vartheta) + 2a(1+\cos(\vartheta))\cos(\vartheta) \qquad a>0$$

$$\Updownarrow$$

$$= \cos(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta)$$

$$\Updownarrow$$

$$= \cos(\vartheta) + 2\cos^2(\vartheta) - 1$$

risolvendo quest'ultima equazione si trova

$$\cos(\vartheta) = -1$$ ← non accettabile (si ha una singolarità) Infatti in questo caso si ha che $\vartheta = \pi$ e che $\gamma(\pi) = 0$. La curva cessa di essere di classe C^1 e inoltre $\dot{\gamma}(\pi) = (0,0)$.

$$\cos(\vartheta) = 1/2$$

Pertanto si ha $\cos(\vartheta) = \frac{1}{2}$ che sostituita in ⊛ porta a $\sin(\vartheta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Quindi abbiamo trovato che

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}a \\ y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

quindi l'equazione della retta tangente è

$$y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}a$$

(la retta tangente passa per il punto $P=(x,y)$ trovato ed è parallela all'asse delle x).

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva definita da

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Soluzione

La curva in questione è espressa implicitamente in coordinate cartesiane. In questo caso è possibile esplicitare l'equazione rispetto alla variabile y. Facendo ciò si ricava

$$y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$$

La curva è simmetrica rispetto agli assi; studiamone la porzione nel primo quadrante. In questo caso si deve avere $0 < x < a$.
Calcoliamo ora

$$y' = \frac{2}{3}\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3}\right) = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot x^{-1/3}$$

calcoliamo poi

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right) \cdot x^{-2/3}} = \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} = a^{1/3} \cdot x^{-1/3}$$

Pertanto, in base alla formula si ha che la lunghezza cercata è

$$L = 4 \int_0^a a^{1/3} \cdot x^{-1/3} = 4 a^{1/3} \cdot \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_0^a = \frac{3}{2} \cdot 4a = 6a.$$

Esercizio 4

Calcolare la lunghezza della seguente curva nello spazio le cui coordinate parametriche sono:

$$\gamma(t)=\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=\frac{8}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3 \\ z(t)=\frac{4}{3}t^3-t \end{cases} \qquad \text{dove } 0\leq t\leq 1$$

Soluzione

La lunghezza di γ è data dalla seguente formula

$$L=\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,dt$$

Calcoliamo le derivate prime di ciascuna componente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=2t \\ \dot{y}(t)=8t^4-2t^2=2t^2(4t^2-1) \\ \dot{z}(t)=4t^2-1 \end{cases}$$

poi calcoliamo

$$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}=\sqrt{4t^2+4t^4(4t^2-1)^2+(4t^2-1)^2}=\sqrt{64t^8-32t^6+20t^4-4t^2+1}=$$

$$=\sqrt{(8t^4+1)^2-16t^4-32t^6+20t^4-4t^2}=\sqrt{(8t^4+1)^2-32t^6-4t^2+4t^4}=$$

$$=\sqrt{(8t^4+1)^2-4t^2(8t^4+1)+4t^4}=\sqrt{(8t^4+1)^2-2\cdot(2t^2)(8t^4+1)+(2t^2)^2}=$$

$$=\sqrt{(8t^4-2t^2+1)^2}=|8t^4-2t^2+1|$$

osserviamo che $8t^4-2t^2+1>0$ $\forall t$ (il discriminante è negativo) quindi

$$L=\int_0^1 8t^4-2t^2+1=\left[\frac{8t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{8}{5}-\frac{2}{3}+1=\frac{24-10+15}{15}=\frac{29}{15}$$