

Esercitazione del 20-12-11

Analisi I

Dott.ssa Silvia Saoncella
silvia.saoncella.3[at]studenti.univr.it

a.a. 2011-2012

1 Integrale di funzioni razionali

Supponiamo di voler calcolare un'integrale del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado n , mentre $Q(x)$ è un polinomio di grado m .

- se il grado di $P(x)$ è maggiore o uguale al grado di $Q(x)$ si esegue la *divisione tra polinomi*.
- se il grado di $P(x)$ è strettamente minore al grado di $Q(x)$ si utilizza il principio di *identità dei polinomi*.

Supponiamo ora che il grado del numeratore sia strettamente minore del grado del denominatore.

DENOMINATORE DI PRIMO GRADO

Poiché le costanti moltiplicative si possono portare fuori dal segno di integrale, l'unico caso da considerare è il seguente:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \log |ax+b| + C$$

DENOMINATORE DI SECONDO GRADO

Supponiamo ora che $Q(x) = x^2 + bx + c$ sia un polinomio di secondo grado e che $P(x)$ è al massimo di primo grado. Quindi ci troviamo davanti ad una situazione del seguente tipo:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx$$

Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori. Ci sono tre casi da considerare a seconda del valore del discriminante Δ .

1. Caso $\Delta > 0$

L'equazione $Q(x) = 0$ ha due radici reali e distinte α e β , pertanto il polinomio $Q(x)$ si può fattorizzare come

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$$

e l'integrale diventa

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx$$

Per calcolare l'integrale si procede andando a scrivere la funzione fratta come somma di funzioni fratte più semplici, cioè

$$\frac{Ax + B}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{C}{x - \alpha} + \frac{D}{x - \beta}$$

dove i valori dei numeri C e D si determinano imponendo la condizione di uguaglianza tra polinomi.

2. Caso $\Delta = 0$

L'equazione $Q(x) = 0$ ha una sola radice reale (contata con la sua molteplicità), pertanto il polinomio $Q(x)$ è un quadrato, cioè

$$x^2 + bx + c = (x - \alpha)^2$$

e l'integrale da calcolare diventa

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} dx$$

In questo caso la frazione da integrare si riscrive nel seguente modo

$$\frac{Ax + B}{(x - \alpha)^2} = \frac{C}{x - \alpha} + \frac{D}{(x - \alpha)^2}$$

e si determinano i valori dei numeri C e D imponendo la condizione di uguaglianza tra polinomi.

3. Caso $\Delta < 0$

L'equazione $Q(x) = 0$ non ha due radici reali e il polinomio $Q(x)$ non si può scomporre in fattori.

DENOMINATORE DI GRADO QUALUNQUE

L'idea generale è sempre la stessa: scrivere la frazione da integrare come somma di frazioni più semplici. Per esempio per calcolare

$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^k(x - \beta)^h} dx$$

si pone

$$\frac{Ax + B}{(x - \alpha)^k(x - \beta)^h} = \frac{C_1}{x - \alpha} + \frac{C_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{C_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{D_1}{x - \alpha} + \frac{D_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{D_h}{(x - \alpha)^h}$$

e si determinano i valori dei numeri $C_1, C_2, \dots, C_K, D_1, D_2, \dots, D_h$

2 Integrazione per parti

Sia f una funzione continua su un intervallo I di \mathbb{R} e sia $g \in C^1(I)$. Allora se F è una primitiva di f (ovvero $F(x) = \int f(x) dx$) si ha

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

3 Esercizi

Esercizio 1.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int e^{3x} \cos x dx$$

Svolgimento.

Risolviamo il seguente integrale per parti

$$\int e^{3x} \cos x dx = \sin x \cdot e^{3x} - \int \sin x \cdot 3e^{3x} dx$$

applichiamo la formula per parti all'integrale a secondo membro

$$\int \sin x e^{3x} dx = -\cos x \cdot e^{3x} + \int \cos x \cdot 3e^{3x} dx = -e^{3x} \cos x + 3 \int \cos x \cdot e^{3x} dx$$

quindi ricompattando il tutto

$$\int e^{3x} \cos x dx = \sin x \cdot e^{3x} + 3e^{3x} \cos x - 9 \int \cos x e^{3x} dx$$

portando l'integrale a secondo membro (poiché coincide con l'integrale cercato) a sinistra dell'uguale si ricava che

$$10 \int e^{3x} \cos x dx = \sin x \cdot e^{3x} + 3e^{3x} \cos x$$

quindi

$$\int e^{3x} \cos x dx = \frac{e^{3x}}{10} (\sin x + 3 \cos x) + c$$

Esercizio 2.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int x \sin x dx$$

Svolgimento.

Andiamo a risolvere il seguente integrale per parti. Scelgo di integrare il seno e di derivare

il polinomio. Questo perché ogni volta che derivo un polinomio il suo grado diminuisce fino ad ottenere una costante. In questo modo l'integrale che si ottiene ha un'espressione più semplice rispetto a quella di partenza. Si ha

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

Esercizio 3.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int (x + 1)^2 \cos x \, dx$$

Svolgimento.

Andiamo a risolverlo per parti applicando la regola due volte dove, in entrambe, si sceglie di derivare il polinomio ed integrare l'altra funzione

$$\begin{aligned} \int (x + 1)^2 \cos x \, dx &= \sin x \cdot (x + 1)^2 - \int \sin x \cdot 2(x + 1) \, dx \\ &\quad 2 \text{ è una costante e posso portarla fuori dall'integrale} \\ &= (x + 1)^2 \sin x - 2 \left[-(x + 1) \cos x + \int \cos x \, dx \right] \\ &= (x + 1)^2 \sin x + 2(x + 1) \cos x - 2 \sin x + c \end{aligned}$$

Esercizio 4.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} \, dx$$

Svolgimento.

Siccome il grado del polinomio a numeratore è maggiore del grado del polinomio a denominatore si può procedere con la divisione tra polinomi¹.

¹Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, si prende l'esponente di grado massimo di $A(x)$ e lo si divide per l'esponente di grado massimo di $B(x)$. Si calcola in resto $R(x)$ andando a moltiplicare il quoziente $Q(x)$ ottenuto per il divisore $B(x)$ e cambiando segno a ciascun termine. Infine si somma il polinomio $A(x)$ con il resto ottenuto. Si procede con l'algoritmo fino a quando il grado del resto è minore del grado del divisore. Infine si ha che $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Quindi

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 & -3x & +7 & | & x & -5 \\
 -2x^2 & +10x & & | & 2x & +7 \\
 \hline
 // & 7x & +7 & | & & \\
 & -7x & +35 & | & & \\
 \hline
 & // & 42 & | & &
 \end{array}$$

quindi abbiamo ottenuto che

$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} = 2x + 7 + \frac{42}{x - 5}$$

Dunque

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} dx = \int \left(2x + 7 + \frac{42}{x - 5} \right) dx = x^2 + 7x + 42 \log |x - 5| + c$$

Esercizio 5.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx$$

Svolgimento.

Anche in questo caso si può procedere con la divisione tra polinomi. Quindi

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 3x^4 + x + 3 & | & x^2 - 1 \\
 -x^5 + x^3 & | & x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
 \hline
 // -3x^4 + x^3 + x + 3 & | & \\
 3x^4 - 3x^2 & | & \\
 \hline
 // x^3 - 3x^2 + x + 3 & | & \\
 -x^3 + x & | & \\
 \hline
 // -3x^2 + 2x + 3 & | & \\
 3x^2 - 3 & | & \\
 \hline
 // 2x & | &
 \end{array}$$

quindi

$$\frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} = x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx &= \int \left(x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx = \\
 &= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log |x^2 - 1| + c
 \end{aligned}$$

Esercizio 6.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Svolgimento.

Notiamo che la funzione integranda è una funzione fratta e che non si può effettuare la divisione poiché il grado del polinomio a numeratore è inferiore rispetto a quello a denominatore. Procediamo andando a decomporre la frazione fratta nella somma di più frazioni fratte, dette fratte semplici. Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Abbiamo ottenuto due fattori di 1° grado, quindi la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{(A + B)x - (3A + 2B)}{(x - 2)(x - 3)}$$

affinché la prima e l'ultima frazione siano uguali, deve essere che

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -(3A + 2B) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(\frac{-2}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} \right) dx \\ &\text{per la proprietà di linearità dell'integrale} \\ &= \int \frac{-2}{x - 2} dx + \int \frac{2}{x - 3} dx \\ &\text{per le proprietà del differenziale} \\ &= \int \frac{-2}{x - 2} d(x - 2) + \int \frac{2}{x - 3} d(x - 3) \\ &\text{poiché sono degli integrali immediati} \\ &= -2 \log |x - 2| + 2 \log |x - 3| + c \\ &= 2 \log \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + c \end{aligned}$$

Esercizio 7.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Svolgimento.

Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Abbiamo ottenuto un fattore di primo grado con ordine di molteplicità 2, quindi la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{2x+3}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} = \frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}$$

affinché la prima e l'ultima frazione siano uguali, deve essere che

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - 2A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 7 \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{2}{x-2} + \int \frac{7}{(x-2)^2} dx = 2 \log|x-2| - \frac{7}{x-2} + c$$

Esercizio 8.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

Svolgimento.

In questo caso il denominatore non è scomponibile in fattori, ma lo si può riscrivere nel seguente modo

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+2)^2+1$$

pertanto l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} d(x+1) = \arctan(x+1) + c$$

Esercizio 9.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2} dx$$

Svolgimento.

Come nell'esercizio precedente, il denominatore non è scomponibile in fattori, quindi

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x+6}{x^2+2x+2} dx &= 3 \int \frac{x+2}{(x+1)^2+1} dx \\
 x+2 &= x+1+1 = \frac{2(x+1+1)}{2} = \frac{2(x+1)+2}{2} \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2(x+1)+2}{(x+1)^2+1} dx \\
 &\quad \text{rompendo la frazione} \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\
 &\quad \text{nel primo integrale a numeratore si ha la derivata del denominatore} \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2+1} d[(x+1)^2+1] + \frac{3}{2} \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\
 &= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + 3 \arctan(x+1) + c
 \end{aligned}$$

Esercizio 10.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Svolgimento.

Ricordando la formula di duplicazione del seno², si ha che

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

quindi andando a sostituire

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})} dx \\
 &\quad \text{a denominatore dividiamo e moltiplichiamo per } \cos x \\
 &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tan(\frac{x}{2}) \cos^2(\frac{x}{2})} dx
 \end{aligned}$$

andando ad osservare la funzione integranda, notiamo che nella sua espressione c'è una funzione, $\tan(\frac{x}{2})$ e la sua derivata, $1/\cos^2(\frac{x}{2})$. Abbiamo il seguente differenziale

$$d(\tan \frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} dx$$

si ha che

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tan(\frac{x}{2}) \cos^2(\frac{x}{2})} dx = \int \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} d(\tan \frac{x}{2}) = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c$$

² $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\int 1/t dt = \log |t| + c$.

Esercizio 11.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \cos^2 x dx$$

Svolgimento.

Usando la seguente identità, ricavata dalle formule di bisezione del coseno³,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

si ha

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx$$

rompiamo l'integrale nella somma di due integrali per la linearità

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2} d(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c \end{aligned}$$

Si sarebbe potuto risolvere anche per parti, infatti

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx$$

calcoliamo a parte l'ultimo integrale

$$\int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = x - \int \cos^2 x dx$$

dunque rimettendo tutto assieme

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

da cui si ricava

$$2 \int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x + c$$

quindi

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$$

Esercizio 12.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \sin^3 x dx$$

³ $\cos(\alpha/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos(\alpha))/2}$

Svolgimento.

Usando l'identità

$$\sin^3 x = \sin x (1 - \cos^2 x)$$

si ottiene

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int \sin x \, dx + \int -\sin x \cos^2 x \, dx$$

il secondo integrale lo si risolve andando ad usare il metodo per sostituzione. Si pone

$$t = \cos x \quad \Rightarrow \quad dt = -\sin x \, dx$$

allora

$$\int -\sin x \cos^2 x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

riconsiderando il tutto

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, dx + \int -\sin x \cos^2 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Esercizio 13.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x}{\cos^2(3x^2 + 5)} \, dx$$

Svolgimento.

Per risolvere questo integrale si ricorre alla tabella degli integrali immediati dopo aver apportato gli opportuni cambiamenti. Quello che si deve cercare è che nell'espressione dell'integranda ci sia la derivata di qualche funzione già presente nell'espressione stessa. Si nota infatti che

$$d(3x^2 + 5) = 6x \, dx$$

quindi dobbiamo moltiplicare e dividere per 6

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2(3x^2 + 5)} \, dx &= \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\cos^2(3x^2 + 5)} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\cos^2(3x^2 + 5)} d(3x^2 + 5) = \\ &= \frac{1}{6} \tan(3x^2 + 5) + c \end{aligned}$$

Esercizio 14.

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} \, dx$$

Svolgimento.

Stesso ragionamento dell'esercizio precedente. Proviamo a calcolare il seguente differenziale

$$d(x^2 + 5) = 2x dx$$

nella funzione integranda la x è già presente, dobbiamo aggiungere un 2, quindi

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 + 5)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int (x^2 + 5)^{-3/2} d(x^2 + 5) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 5)^{-1/2}}{-1/2} + c$$

quindi

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 5}} + c$$