COGNOME | | NOME | | Matr. | |

Firma dello studente ____________________ **A**

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

Tempo: 3 ore.

Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.

✎ **Test 1:** Il polinomio di Mac Laurin di secondo grado della funzione $f(x) = \log(\cos x)$ è

(A) $-\frac{x^2}{2}$ (B) $-x - \frac{x^2}{2}$ (C) $x + \frac{x^2}{2}$ (D) $x - \frac{x^2}{2}$

✎ **Test 2:** Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Allora $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$

(A) 0 (B) $+\infty$ (C) $-\infty$ (D) non esiste

✎ **Test 3:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx =$$

(A) 1 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $\frac{\pi}{8}$

✎ **Test 4:** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora l'espressione

$$\forall \alpha > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tale che } 0 < |x-5| < \beta \text{ implica } f(x) > \alpha$$

(A) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$ (B) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$ (C) $\lim_{x\to5} f(x) = +\infty$ (D) $\lim_{x\to5} f(x) = -\infty$

✎ **Test 5:** Quale delle seguenti relazioni è falsa? (si considerino tutti gli infinitesimi per $x \to 0$)

(A) $e^x = 1 + o(x^2)$ (B) $\cos x = 1 + o(x)$ (C) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^3)$ (D) $e^x = 1 + x + o(x)$

✎ **Test 6:** L'equazione della retta tangente al grafico di $y = x\cos(x^2)$ nel punto $\sqrt{\pi}$ è:

(A) $y = -x$ (B) $y = -x + 2\sqrt{\pi}$ (C) $y = -2\pi x + 2\pi\sqrt{\pi}$ (D) $y = -2\pi x - 2\pi\sqrt{\pi}$

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

Soluzione dei test:

✎ **Test 1:**

Ricordando gli sviluppi di Mac Laurin per le funzioni coseno e logaritmo, arrestando lo sviluppo del coseno al secondo ordine e quello del logaritmo al primo ordine si ottiene

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x + o(x)$$

da cui

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ **Test 2:**

Il problema di Cauchy proposto coinvolge un'equazione differenziale ordinaria lineare del II ordine a coefficienti costanti omogenea. Siccome l'equazione caratteristica associata è $r^2+2r-3=0$ che dà come soluzioni $r=1$ e $r=-3$, l'integrale generale dell'equazione associata risulta

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Imponiamo i dati di Cauchy: si ha

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \qquad y'(0) = C_1 - 3C_2 = 1$$

quindi

$$C_1 = 1/4 \qquad C_2 = -1/4$$

quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto vale

$$y(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

A questo punto banalmente

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$

quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(B)}}$.

✎ **Test 3:**

Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \lim_{\omega\to+\infty} \int_{0}^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{\omega}^{0} + \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{0}^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to-\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) + \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) \\
&= 2\lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) = +\infty.
\end{aligned}$$

Quindi la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Test 4:**

Richiamando la definizione di limite, la risposta corretta è la $\boxed{\text{(C)}}$.

✎ **Test 5:**

La risposta corretta (nel senso dell'unica risposta sbagliata!) è la $\boxed{\text{(A)}}$. Infatti per vedere se $e^x = 1 + o(x^2)$ bisognerebbe dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = 0$$

ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$$

non esiste perché
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow 1}\frac{1}{x}$$
e ovviamente
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$
non esiste (vale $+\infty$ se $x\to 0^+$ e vale $-\infty$ se $x\to 0^-$); quindi in particolare non fa zero.
Si verifica facilmente che tutte le altre affermazioni sono corrette.

✎ **Test 6:**
L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto (x_0,y_0) vale
$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$$
Nel nostro caso $x_0=\sqrt{\pi}$ e $y_0=f(x_0)=f(\sqrt{\pi})=\sqrt{\pi}\cos\pi=-\sqrt{\pi}$.
Quindi si ha
$$f'(x)=\cos x^2-2x^2\sin x^2 \qquad f'(\sqrt{\pi})=\cos\pi-2\pi\sin\pi=-1$$
Quindi l'equazione richiesta è:
$$y=-\sqrt{\pi}+(x-\sqrt{\pi})=-x$$
e pertanto la risposta corretta è la $\boxed{\text{(A)}}$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Determinare l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2n^3)(e^{1/n}-1)^{\alpha}$$

è convergente.

Si tratta di una serie a termini non negativi, visto che per ogni $x \geq 0$ si ha $e^x - 1 \geq 0$. D'altra parte, se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e dunque

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

sfruttando i limiti notevoli. Quindi dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2n^3}{n^{\alpha}}$$

che a sua volta si comporta come la serie

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^{\alpha}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-3}}$$

che è una serie armonica generalizzata di esponente $\gamma = \alpha - 3$. Si sa che una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ converge se $\gamma > 1$ quindi nel nostro caso la serie di partenza converge se $\alpha - 3 > 1$ quindi se $\alpha > 4$.

✎ **Esercizio (4 punti)**

Si calcoli

$$\int_x^{2x} t\sin(t/2)\,dt + \frac{d}{dx}(x^{(e^{x^3})})$$

Si tratta di una "somma" di due esercizi, da svolgere indipendentemente e separatamente. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} t\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt &= \left[-2t\cos\frac{t}{2}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} 2\cos\frac{t}{2}\,dt \\ &= -2(2x)\cos x + 2x\cos\frac{x}{2} + 2\left[-2\sin\frac{t}{2}\right]_x^{2x} \\ &= -4x\cos x + 2x\cos\frac{x}{2} - 4\sin x + 4\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece la seconda parte dell'esercizio si ha

$$x^{(e^{x^3})} = e^{\log x^{(e^{x^3})}} = e^{e^{x^3}\log x}$$

da cui

$$\frac{d}{dx}x^{(e^{x^3})} = x^{(e^{x^3})}\left[e^{x^3}3x^2\log x + \frac{e^{x^3}}{x}\right]$$

Quindi riassumendo

$$\int_x^{2x} t\sin(t/2)\,dt + \frac{d}{dx}(x^{(e^{x^3})}) = -4x\cos x + 2x\cos\frac{x}{2} - 4\sin x + 4\sin\frac{x}{2} + x^{(e^{x^3})}\left[e^{x^3}3x^2\log x + \frac{e^{x^3}}{x}\right].$$

✎ **Studio di funzione (8 punti)** Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

La funzione data è ben definita in $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}$ che è equivalente ad avere $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$.
Si ha $f(0) = 0$ mentre ci si accorge che la funzione è dispari, infatti

$$f(-x) = \arctan(-x) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -f(x).$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

La funzione è infinitamente derivabile sul suo dominio quindi è possibile calcolare

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{x^4-1}$$

da cui si evince che

$$f'(x) > 0 \iff x^4 - 1 > 0 \iff x < -1 \lor x > 1$$

quindi nel dominio di definizione della f, la funzione è sempre decrescente.
Infine calcoliamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \frac{4x(x^4-1) - 4x^3\, 2x^2}{(x^4-1)^2} = \frac{-4x(1+x^4)}{(x^4-1)^2}$$

quindi la funzione è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$. Il grafico qualitativo è quello mostrato in figura.

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — Simulazione compito d'esame

✎ **Tema: (5 punti)**
Continuità, monotonia e invertibilità di funzioni definite su un intervallo: si illustrino le relazioni tra questi concetti con esempi e/o applicazioni.

Premettiamo prima di tutto le definizioni di funzione continua, monotona e invertibile, con opportuni esempi.
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo e sia $c \in I$. Allora si dice che f è continua in c se esiste

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I. Una funzione non continua in un punto c si dice discontinua.

Esempio: la funzione $x \mapsto \sin x$ è continua in ogni punto del suo dominio; la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

è discontinua nell'origine.

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f si dice monotona crescente se accade che

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Analogamente f si dice monotona decrescente se accade che

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Se le disuguaglianze precedenti sono strette si dice che f è monotona strettamente crescente (risp. decrescente).

Esempio: la funzione $x \mapsto e^x$ è monotona strettamente crescente; la funzione $x \mapsto \sin x$ non è monotona su tutto il suo dominio, mentre ad esempio è monotona crescente ad esempio per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Infine f si dice invertibile se accade che

$$\forall y \in f(D),\ \exists! x \in D : f(x) = y$$

In tal caso si dice che si realizza una corrispondenza biunivoca tra D e $f(D)$.

Esempio: la funzione $x \mapsto x^2$ non è invertibile sul suo dominio di definizione, mentre è invertibile se la si restringe al sottoinsieme dei numeri reali positivi.
In generale quindi sicuramente non sono invertibili nel loro naturale dominio di definizione sia le funzioni simmetriche pari che le funzioni periodiche

Introduciamo il seguente teorema (detto TEOREMA DI MONOTONIA).

Teorema: Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora per ogni $c \in (a, b)$ esistono finiti i limiti destro e sinistro per $x \to c$. Ai due estremi a e b esistono i limiti destro (in a) e sinistro (in b), eventualmente infiniti.

Inoltre vale il seguente importantissimo risultato.

Teorema: Una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona in D è invertibile in D. Inoltre la sua inversa ancora strettamente monotona.

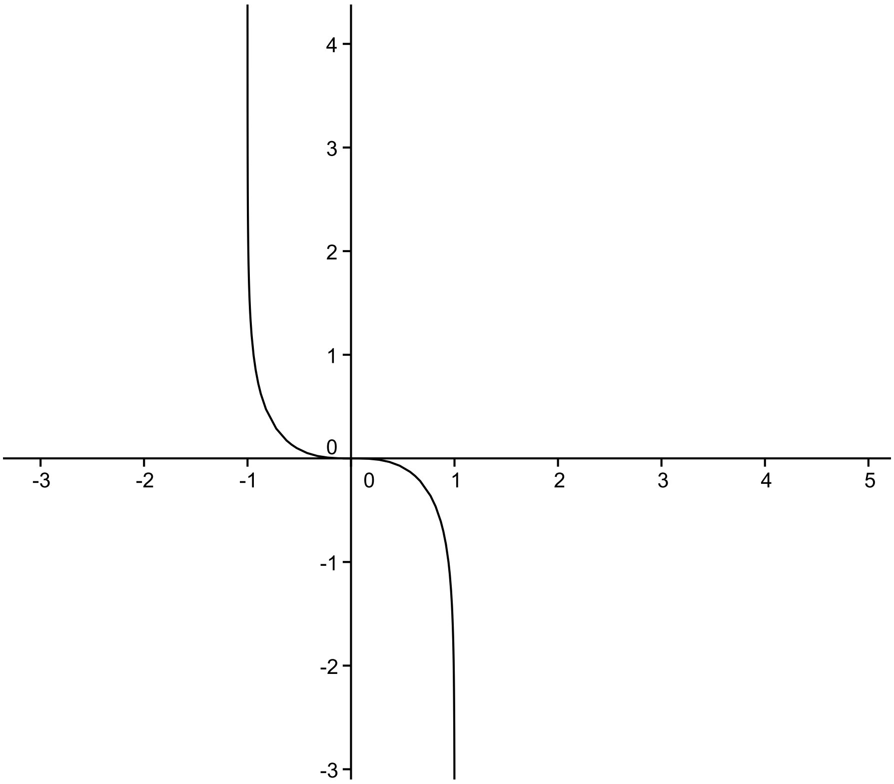
Quindi una funzione definita su un intervallo e strettamente monotona è invertibile (con inversa monotona). Il viceversa in generale non è vero (cioè esistono funzioni invertibili su un intervallo che non sono motonone), basta prendere ad esempio $f(x) = x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 1/x + 1$ per $x \in [1, 2]$. Tuttavia se si aggiunge l'ipotesi della continuità, il teorema si inverte. Più precisamente:

Teorema: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo, una funzione continua su I. Allora f è invertibile in I se e soltanto se è strettamente monotona. In tal caso la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua.

La dimostrazione di questo risultato si basa sul teorema dei valori intermedi, sul teorema di monotonia per f e sull'assioma di continuità dei numeri reali. Si ha inoltre il seguente corollario.

Corollario: Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha inversa continua.

Questo fatto completa la dimostrazione del teorema di continuità delle funzioni elementari, per cui visto che le funzioni esponenziali sono continue allora lo sono anche le funzioni logaritmiche; visto che le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ sono continue, lo sono anche le loro inverse $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5