Esercitazione su grafici di funzioni elementari e domini di funzioni

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 20 Ottobre 2011. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Definizione 1. Per funzioni elementari intendiamo

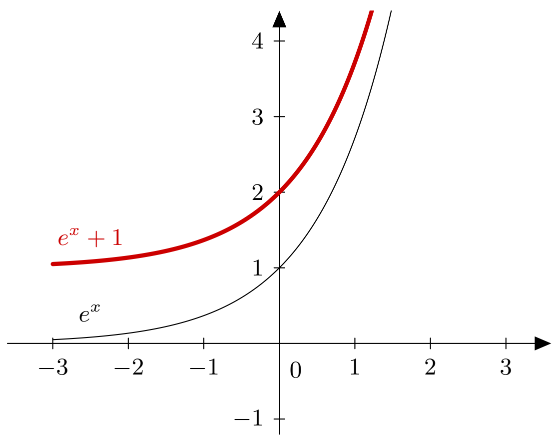
- la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ con la sua inversa $x \mapsto \log x$;
- le funzioni goniometriche $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ e $x \mapsto \tan x$ con le rispettive inverse $x \mapsto \operatorname{arsin} x$, $x \mapsto \arccos x$ e $x \mapsto \operatorname{artan} x$;
- la funzione potenza $x \mapsto x^n$ per $n \geq 1$ intero con la funzione inversa "estrazione di radice" $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Data una funzione elementare $f(x)$ possiamo considerare la traslazione nel senso delle ordinate

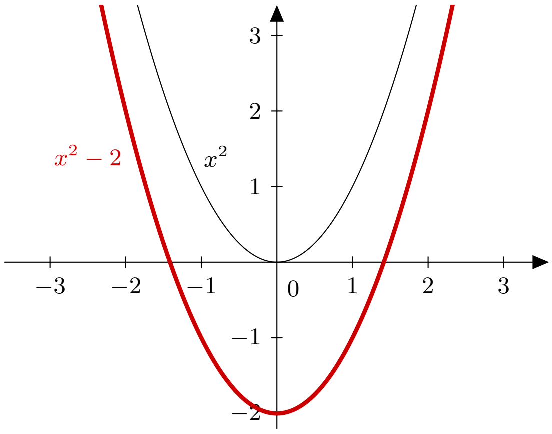
$$y = f(x) + a.$$

Se la costante a è positiva avremo una traslazione verso l'alto, se la costante a è negativa avremo una traslazione verso il basso. Ad esempio

- $y = e^x + 1$;



- $y = x^2 - 2$.

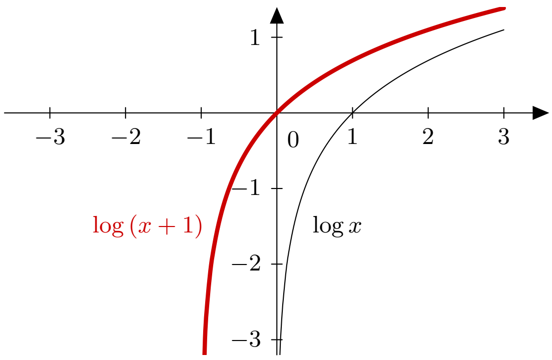


Se invece sommiamo o sottraiamo una costante alla variabile indipendente otteniamo una traslazione nel senso delle ascisse

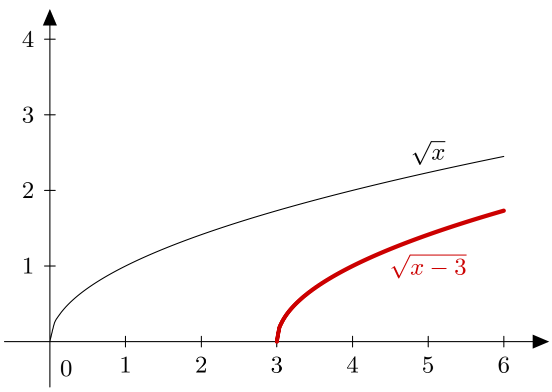
$$y = f(x + a),$$

a costante. In particolare se $a > 0$ allora avremo una traslazione verso sinistra, se $a < 0$ avremo una traslazione verso destra. Ad esempio

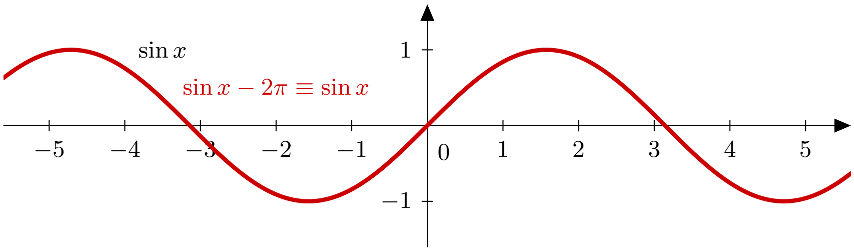
- $y = \log(x + 1)$;



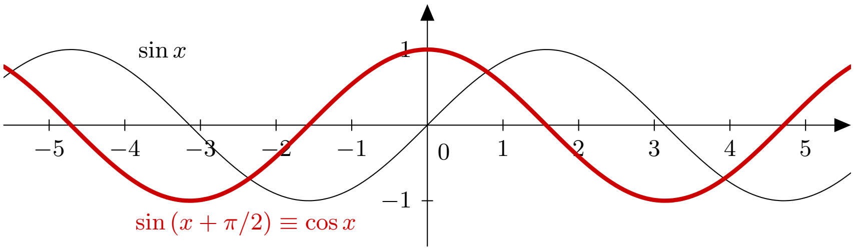
- $y = \sqrt{x - 3}$;



- $y = \sin(x - 2\pi)$, in questo caso ci aspettiamo che i grafici siano sovrapposti perché, come abbiamo visto la prima esercitazione, il seno è una funzione periodica di periodo 2π, avremo quindi $y = \sin x = \sin(x - 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$;



- $y = \sin{(x + \pi/2)}$,



  dopo aver tracciato il grafico traslato ci accorgiamo di aver ottenuto esattamente il grafico della funzione coseno, abbiamo cioè trovato l'identità trigonometrica

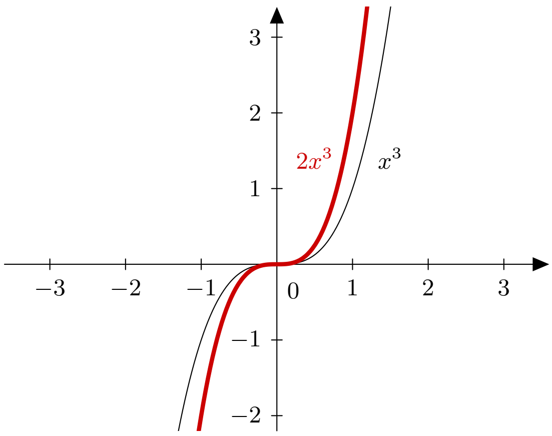
$$\sin{(x + \pi/2)} = \cos x.$$

Se invece consideriamo la trasformazione

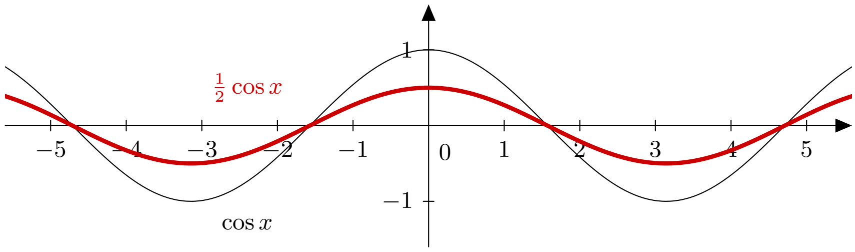
$$y = kf(x)$$

stiamo operando una dilatazione trasversale. In particolare se $k > 1$ avremo uno stiramento del grafico di $f(x)$ verso l'alto, mentre se $0 < k < 1$ il grafico si contrae. Infine se $k < 0$ abbiamo una riflessione rispetto l'asse delle ascisse più uno stiramento se $|k| > 1$ oppure più una contrazione se $|k| < 1$. Ad esempio

- $y = 2x^3$;

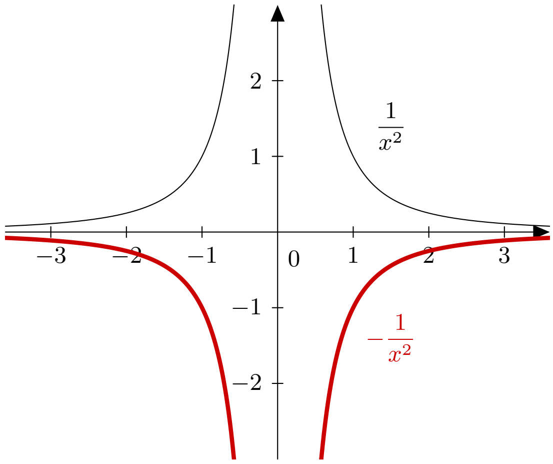


- $y = \frac{1}{2}\cos x$;

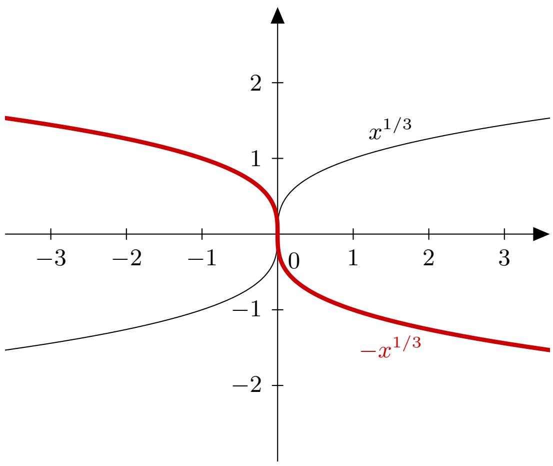


Caso particolare: se $k = -1$ stiamo facendo una simmetria rispetto all'asse delle ascisse. Ad esempio

- $y = -\dfrac{1}{x^2}$;



- $y = -\sqrt[3]{x}$.

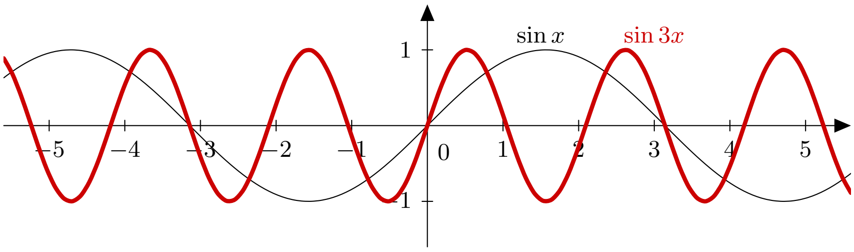


Analogamente se consideriamo la dilatazione longitudinale

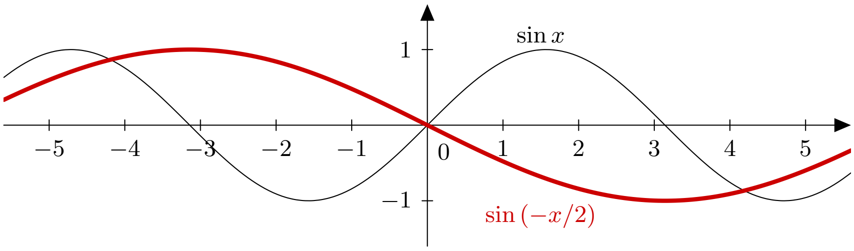
$$y = f(kx),$$

se $k > 1$ stiamo comprimendo il grafico di $f(x)$ nella direzione longitudinale mentre se $0 < k < 1$ lo stiamo rilassando. Se invece $k < 0$ si deve prima fare una riflessione attorno all'asse delle ordinate e quindi una compressione, se $|k| > 1$, o un rilassamento, se $|k| < 1$. Ad esempio

- $y = \sin(3x)$;

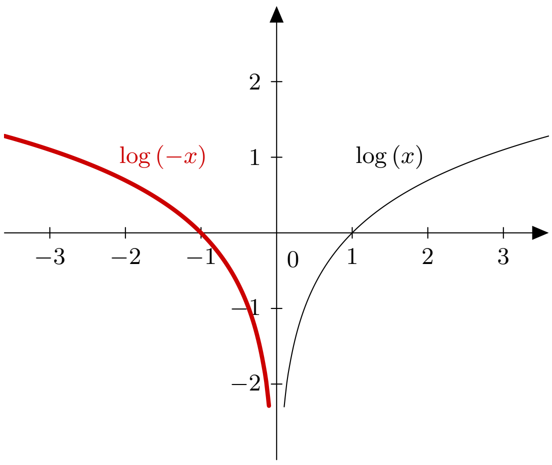


- $y = \sin(-x/2)$.



Caso particolare: se $k = -1$ stiamo facendo una simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Se la funzione è *pari*, allora il grafico rimane inalterato. Ad esempio

- $y = \log(-x)$.



Infine se consideriamo il valore assoluto di una certa funzione elementare $f(x)$,

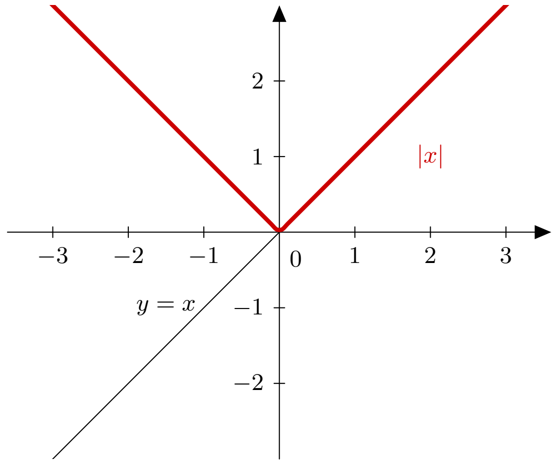
$$y = |f(x)|$$

è definita come

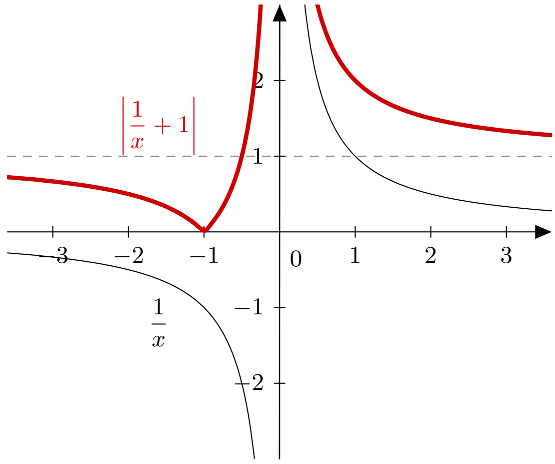
$$y = \begin{cases} f(x) \text{ se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) \text{ se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Ad esempio

- $y = |x|$;



- $y = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$.

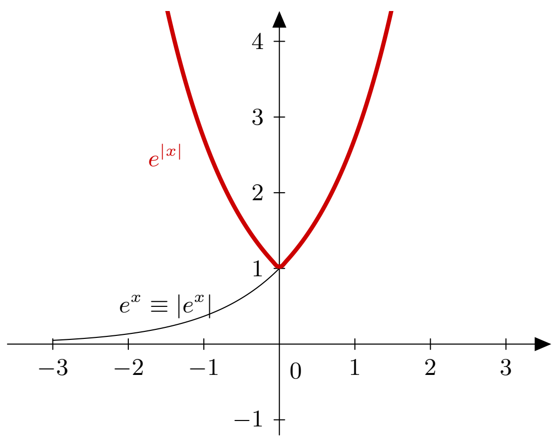


Se invece il modulo lo consideriamo sull'argomento otteniamo

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \geq 0, f(-x) \text{ se } x < 0, \end{cases}$$

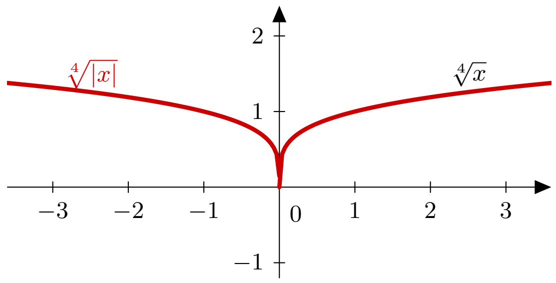
cioè il grafico è inalterato nel semipiano destro, mentre nel semipiano sinistro è ottenuto tramite una simmetria rispetto all'asse y. Ad esempio

- $y = e^{|x|}$,



in particolare osserviamo che $y = e^{|x|} \neq |e^x| = e^x$, è questo un tipico caso in cui si ha a che fare con la non commutatività della composizione di funzioni.

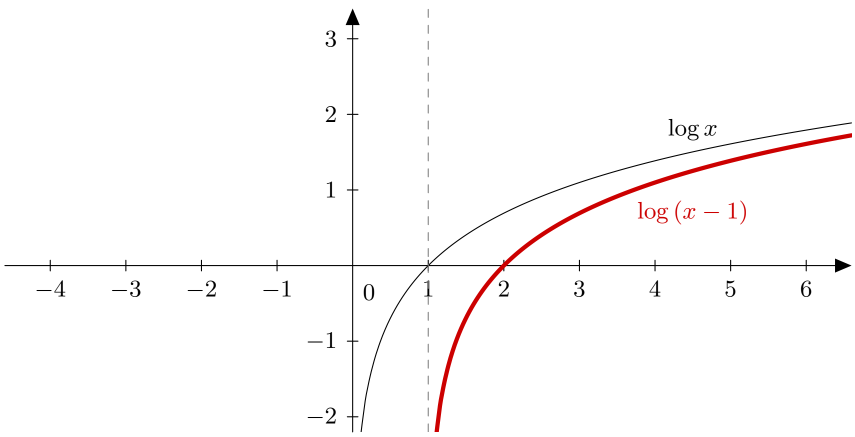
- $y = \sqrt[4]{|x|}$.



Esercizio 1. A partire dal grafico di $f(x) = \log x$ ricavare quello di

$$y = |2\log|x-1||.$$

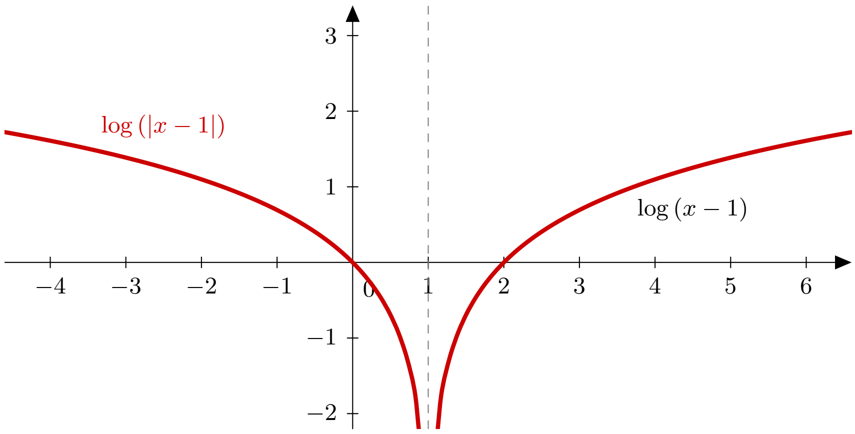
Soluzione. Per prima cosa tracciamo il grafico del logaritmo e da questo ricaviamo quello di $y = \log(x-1)$ traslandolo verso il basso di un'unità:



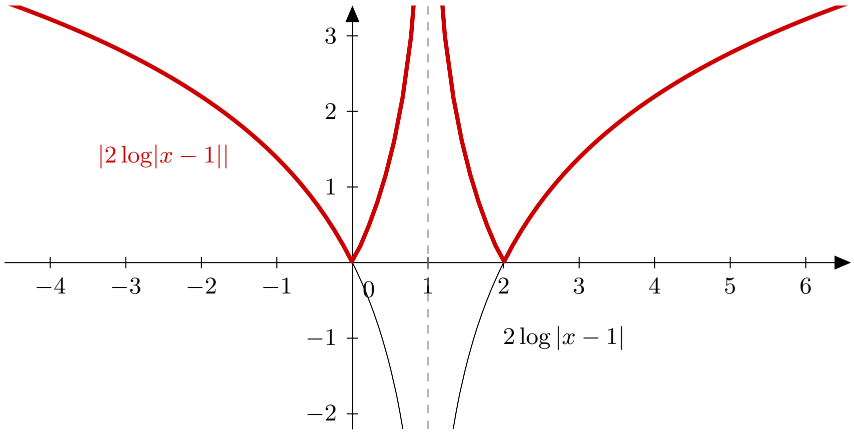
A questo punto dobbiamo ricavare il grafico di $y = \log(|x-1|)$ a partire da quello del logaritmo traslato. Per quanto abbiamo visto precedentemente

$$y = \begin{cases} \log(x-1) \text{ se } x > 1, \\ \log(-(x-1)) = \log(1-x) \text{ se } x < 1, \end{cases}$$

quindi nel semipiano $x > 1$ il grafico rimane inalterato, mentre nel semipiano $x < 1$ dobbiamo rappresentare la funzione $\log(1-x)$. Abbiamo visto prima che $\log(-x)$ si ottiene facendo il simmetrico di $\log x$ rispetto all'asse delle ordinate, a questo punto $\log(-x+1)$ si ottiene spostando verso destra di un'unità quanto trovato. In conclusione il grafico cercato si ottiene per simmetria di $\log(x-1)$ rispetto alla retta di equazione $x = 1$, come mostrato in figura.



Infine rimane solo da dilatare il grafico longitudinalmente e “ribaltare” verso l’alto i tratti di curva che hanno ordinate negative tramite una simmetria rispetto l’asse delle ascisse, in questo modo si ottiene il grafico cercato.



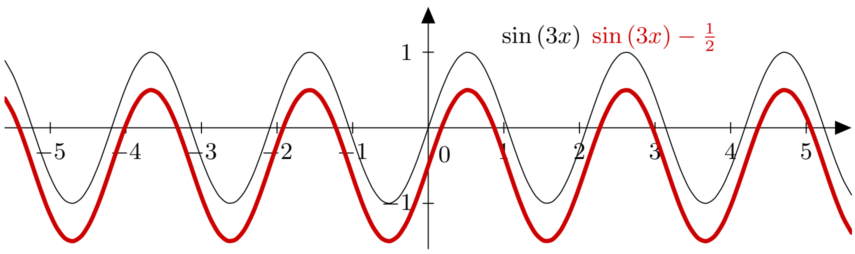
Esercizio 2. A partire dal grafico di $f(x) = \sin x$ ricavare quello di

$$y = |2\sin(3x) - 1|.$$

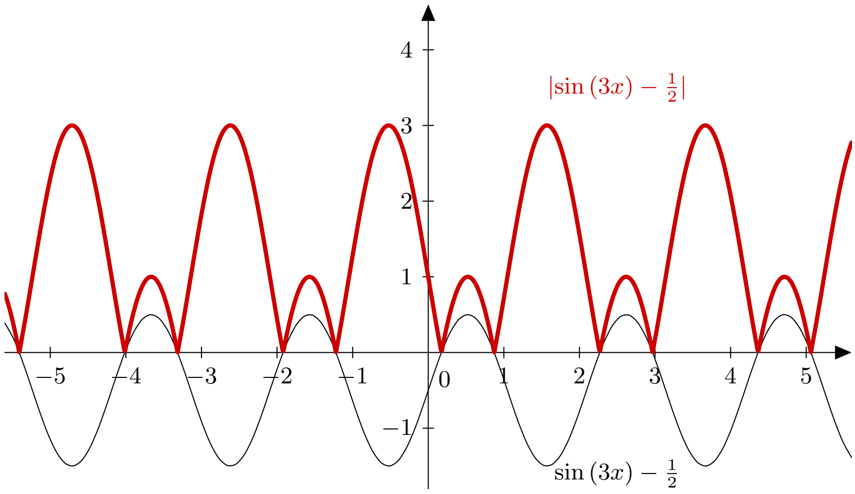
Soluzione. Per prima cosa raccogliamo il coefficiente 2 all’interno del modulo ottenendo

$$y = |2(\sin(3x) - 1/2)| = 2|\sin(3x) - 1/2|.$$

Abbiamo già visto come arrivare al grafico di $y = \sin(3x)$ partendo da quello di $\sin x$. Trasliamo quindi ora il grafico di $y = \sin(3x)$ verso il basso di $1/2$, ottenendo



A questo punto il modulo “ribalta” verso l’alto i tratti di curva che hanno ordinate negative tramite una simmetria rispetto all’asse delle ascisse. Infine la costante di moltiplicazione 2 dilata quanto ottenuto trasversalmente, come si può osservare nella seguente figura

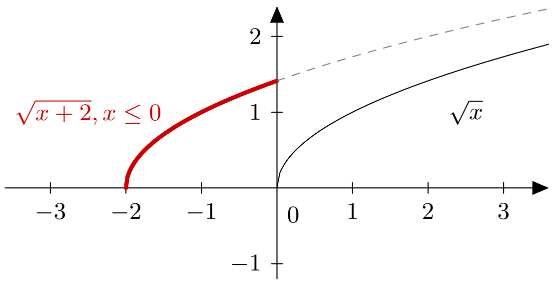


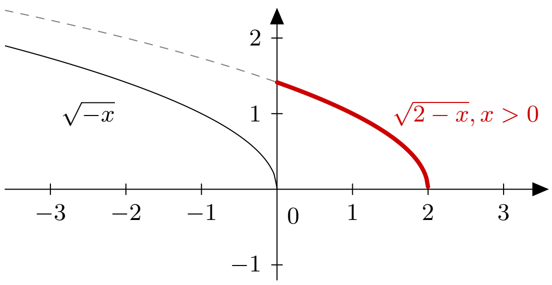
Esercizio 3. A partire dal grafico di $f(x) = \sqrt{x}$ ricavare quello di

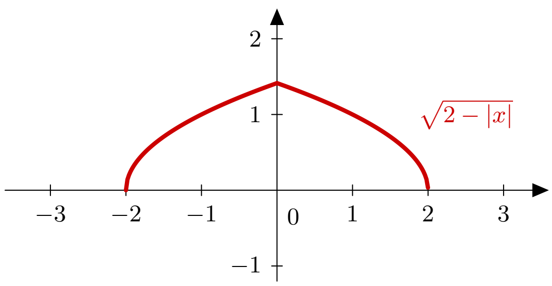
$$y = |3\sqrt{2 - |x|} - 2|.$$

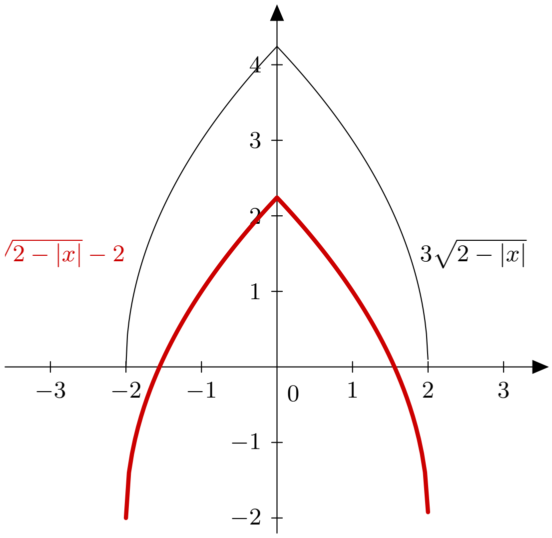
Soluzione. Per prima cosa possiamo scrivere $\sqrt{2 - |x|}$ come

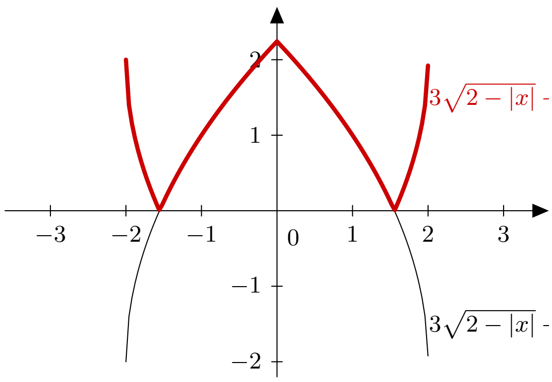
$$\sqrt{2 - |x|} = \begin{cases} \sqrt{2 - x} \text{ se } x \geq 0, \\ \sqrt{2 + x} \text{ se } x < 0. \end{cases}$$











Esercizio 4. Studiare il dominio della seguente funzione

$$y = f(x) = \log{(2x)}^{\operatorname{arsin} x}.$$

Soluzione. Il logaritmo è ben definito per argomenti strettamente positivi, quindi la prima condizione da imporre è $2x > 0$. L'arcoseno invece è definito per $-1 \leq x \leq 1$. Infine l'elevamento a potenza è definito per qualsiasi esponente reale a patto che la base sia positiva, quindi la terza,ed ultima, condizione da imporre è $\log{(2x)} > 0$, cioè $2x > 1$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ 2x > 1, \end{cases}$$

che ha soluzione per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $1/2 < x \leq 1$. Concludiamo quindi che

$$\mathrm{Dom}(f) = (1/2, 1]\,.$$

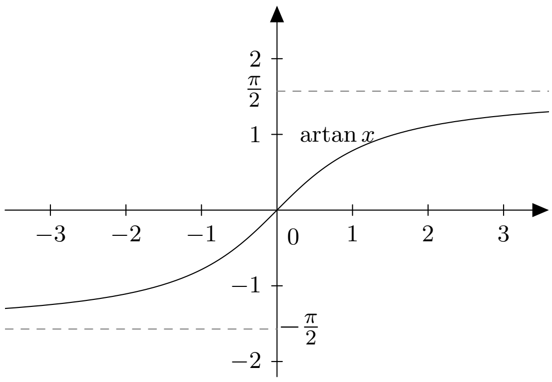
Esercizio 5. Studiare il dominio della seguente funzione

$$y = f(x) = \operatorname{artan}\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}.$$

Soluzione. Quando la funzione comprende una radice di indice pari la prima cosa di cui accertarsi è che il suo argomento non sia negativo, chiediamo cioè che

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0,$$

cioè per il numeratore chiediamo che $e^x \geq 1$, cioè $x \geq 0$, mentre per il denominatore chiediamo $e^x > -1$, condizione che è sempre verificata. Segue quindi che il dominio o campo di esistenza dell'argomento dell'arcotangente è $x \geq 0$. Osservando poi che l'arcotangente è una funzione definita su tutto l'asse reale con grafico



possiamo quindi concludere che

$$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty).$$

Esercizio 6. Studiare il dominio della seguente funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}.$$

Soluzione. Quando la funzione comprende una frazione la prima cosa di cui accertarsi è che il denominatore, chiediamo cioè che

$$1 - \cos x \neq 0,$$

cioè $\cos x \neq 1$ e dalla trigonometria sappiamo che questo accade per $x \neq 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Il dominio di questa funzione è rappresentato quindi dal piano privato delle rette verticali aventi per ascissa multipli interi di 2π, come rappresentato in figura